

1916.

No. 10.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 50. Heft 2.

DER GANZEN REIHE 365. BANDES 2. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 Mk.*

*(Ausgegeben am 15. Juni 1916.)*

# Inhalt.

	Seite
1. Fritz Reiche. Zur Theorie der Dispersion in Gasen und Dämpfen. (Fortsetzung) . . . . .	121
2. R. Gans. Über Paramagnetismus . . . . .	163
3. Clemens Schaefer und Helene Stallwitz. Ein zweidimensionales Dispersionsproblem . . . . .	199
4. W. Voigt. Bemerkungen zu den Svedbergschen Beobachtungen über Elektrizitätsleitung in anisotropen Flüssigkeiten . . . . .	222
5. F. Richarz. Stabilität zweiatomiger Molekeln, ihre Dissoziationswärme und deren Beziehung zur elektrochemischen Theorie . . . . .	229

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweiteriger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



se

inc  
wi  
sic  
sel  
in  
hö  
in  
ku

hin  
me  
wi

(20

(20



# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 50.

## 1. Zur Theorie der Dispersion in Gasen und Dämpfen;

von *Fritz Reichle*.

(Fortsetzung.)

### § 11. Vervollständigung; die Lorenz-Lorentzsche Formel.

Wir wollen jetzt unsere Rechnungen vervollständigen, indem wir auch in den höheren Summen, deren Mittelwerte wir im § 7 berechneten, den Einfluß der Kugel  $r'$  berücksichtigen, was im § 6 schon für die einfachen Summen geschehen war. Infolge von (105) und (107) bleiben nur die in (108) genannten Doppelsummen und die entsprechenden höheren Summen übrig. Indem man dann ganz ebenso wie in (90) und (92) die Beiträge der rechten und linken Halbkugel zu dem

$$\int B_{s,r} dV$$

hinschreibt und ihre Summe innerhalb der geschweiften Klammer in (110) zum Abzug bringt, folgt in genau derselben Weise wie in § 7 das zu (113), (114), (115) analoge Resultat:

$$(202) \quad f_0(x_s) = 1.$$

$$(203) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n(x_s) &= \int_0^{x_s} f_{n-1}(u) du + e^{2ik_0 x_s} \cdot \int_{x_s}^D f_{n-1}(u) e^{-2ik_0 u} du \\ &+ \frac{2\Re}{ik_0} \int_0^\infty e^{-\frac{4\pi\Re r'^2}{3}} r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r'} du [e^{ik_0 u} f_{n-1}(x_s - u) \\ &+ e^{-ik_0 u} f_{n-1}(x_s + u)] \int_u^{r'} r dr \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r}. \end{aligned} \right.$$

Da nun

$$(204) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_u^{r'} r dr \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \\ & = 2\pi i k_0 \left\{ e^{-ik_0 r'} - e^{-ik_0 u} + \frac{r'^2 - u^2}{2 i k_0 r'} \cdot \frac{d}{dr'} \left( \frac{e^{-ik_0 r'}}{r'} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

so kann man nach einigen Rechnungen die Gleichung (203) folgendermaßen umschreiben:

$$(205) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n(x_s) &= \int_0^{x_s} f_{n-1}(u) du + e^{2ik_0 x_s} \cdot \int_{x_s}^D f_{n-1}(u) e^{-2ik_0 u} du \\ &+ 4\pi \Re \int_0^\infty e^{-\frac{4\pi \Re r'^2}{3}} r'^2 dr' \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{ik_0 r'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x_s^2}{r'^2} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 r'} \right) \right] \frac{e^{ik_0(x_s - r')}}{2} \cdot \int_{x_s - r'}^{x_s + r'} du e^{-ik_0 u} f_{n-1}(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r'^2} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 r'} \right) \frac{e^{ik_0(x_s - r')}}{2} \cdot \int_{x_s - r'}^{x_s + r'} du f_{n-1}(u) e^{-ik_0 u} \cdot (u^2 - 2x_s u) \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_s - r'}^{x_s} du f_{n-1}(u) - e^{2ik_0 x_s} \cdot \int_{x_s}^{x_s + r'} du f_{n-1}(u) e^{-2ik_0 u} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dann ergibt sich:

$$(206) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{s'} \overline{B_{ss'}} &= (-2\pi \Re i k_0) f_1(x_s), \\ \sum_{s'} \sum_{s''} \overline{B_{ss'} B_{s's''}} &= (-2\pi \Re i k_0)^2 \cdot f_2(r_s), \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right.$$

Setzt man nun entsprechend (117):

$$(207) \quad S_1(x_s) = 1 + \sigma \sum_{s'} \overline{B_{ss'}} + \sigma^2 \sum_{s'} \sum_{s''} \overline{B_{ss'} B_{s's''}} + \dots$$

so folgt entsprechend (120):

$$(208) \left\{ \begin{aligned} S_1(x) &= 1 + \tau \int_0^x S_1(u) du + \tau \int_x^D e^{2ik_0(x-u)} \cdot S_1(u) du \\ &+ 4\pi \Re \tau \int_0^\infty e^{-\frac{4\pi \Re \tau'^2}{3}} r'^2 dr' \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{ik_0 r'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x^2}{r'^2} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 r'} \right) \right] \frac{e^{ik_0(x-r')}}{2} \cdot \int_{x-r'}^{x+r'} du e^{-ik_0 u} \cdot S_1(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r'^2} \left( 1 + \frac{1}{ik_0 r'} \right) \frac{e^{ik_0(x-r')}}{2} \cdot \int_{x-r'}^{x+r'} du e^{-ik_0 u} \cdot S_1(u) \cdot (u^2 - 2ux) \right. \\ &\quad \left. - \int_{x-r'}^x du S_1(u) - \int_x^{x+r'} du e^{2ik_0(x-u)} \cdot S_1(u) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Es ist mir nicht gelungen, diese komplizierte Integralgleichung allgemein zu lösen. Nur für den Fall, daß sehr dichte Resonatorenlagerung herrscht, kann man die Lösung leicht durchführen. Es ist dann  $k_0 r' \ll 1$ , und wenn man in (205) im dritten Gliede rechts die Integrale nach Potenzen von  $r'$  entwickelt, so ergibt sich, wenn man nur die Glieder höchster Ordnung beibehält, nach einiger Rechnung:

$$(209) \quad 3^{\text{tes}} \text{ Glied rechts} = -\frac{2}{3 ik_0} f_{n-1}(x).$$

In der Integralgleichung (208) folgt für das entsprechende Glied der Wert:

$$-\frac{2\tau}{3 ik_0} \cdot S_1(x).$$

Die Integralgleichung wird also:

$$(210) \quad S_1(x) = 1 + \tau \int_0^x S_1(u) du + \tau \int_x^D e^{2ik_0(x-u)} \cdot S_1(u) du - \frac{2\tau}{3 ik_0} S_1(x).$$

Unter Berücksichtigung von (118) folgt also, wenn man noch

$$(211) \quad \frac{\tau}{1 - \frac{4\pi \Re \sigma}{3}} = \tau_1$$

setzt:

$$(212) \quad S_1(x) = \frac{\tau_1}{\tau} + \tau_1 \cdot \int_0^x S_1(u) du + \tau_1 \int_x^D e^{2ik_0(x-u)} \cdot S_1(u) du.$$

Setzt man endlich:

$$(213) \quad \begin{cases} S_1(x) \cdot e^{-ik_0 x} = \varphi_1(x), \\ \frac{\tau_1}{i} e^{-ik_0 x} = F_1(x), \\ 2ik_0 \tau_1 = \mu_1, \end{cases}$$

so folgt unter Benutzung von (121) die lineare inhomogene Integralgleichung zweiter Art:

$$(214) \quad \varphi_1(x) = F_1(x) + \mu_1 \cdot \int_0^D K(u, x) \cdot \varphi_1(u) du.$$

Die Lösung dieser Integralgleichung erfolgt auf genau demselben Wege wie die Lösung der analogen Gleichung (124). Es folgt:

$$(215) \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = \\ \frac{2}{1 - \frac{4\pi \Re \sigma}{3}} \cdot \frac{(1 - P_1) e^{-ik_0 P_1(D-x)} - (1 + P_1) e^{ik_0 P_1(D-x)}}{(1 - P_1)^2 \cdot e^{-ik_0 P_1 D} - (1 + P_1)^2 \cdot e^{ik_0 P_1 D}}. \end{cases}$$

Dabei ist

$$(216) \quad P_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{8\pi \Re \sigma}{3}}{1 - \frac{4\pi \Re \sigma}{3}}}.$$

Entsprechend (189) ergibt sich für den Brechungsquotienten

$$(217) \quad n = P_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{8\pi \Re \sigma}{3}}{1 - \frac{4\pi \Re \sigma}{3}}}.$$

Vernachlässigt man die Dämpfung, ist also  $\sigma$  reell, so folgt die bekannte Lorenz-Lorentzsche Formel:

$$(218) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi \Re \sigma}{3} = \frac{4\pi \Re \frac{e^2}{m}}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Berücksichtigt man die Dämpfung, so wird  $\sigma$  komplex und erhält den Wert (145). Der Brechungsquotient wird dann komplex ( $n$ ), und aus (193) und (217) folgt:

$$(219) \quad \left\{ \begin{aligned} n^2(1 - \kappa^2) - 1 &= \frac{4\pi \Re \frac{\varepsilon^2}{m} \left( \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi \Re \frac{\varepsilon^2}{m}}{3} \right)}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi \Re \frac{\varepsilon^2}{m}}{3} \right)^2 + 4b^2 \omega^2}, \\ n^2 \kappa &= \frac{4\pi \Re \frac{\varepsilon^2}{m} \cdot b \omega}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi \Re \frac{\varepsilon^2}{m}}{3} \right)^2 + 4b^2 \omega^2}. \end{aligned} \right.$$

## § 12. Die Begründung der Konstellationsmittelung.

Wir haben die Formel für den Brechungsquotienten  $n$  aus dem Konstellationsmittel des elektrischen Feldes im Aufpunkt erschlossen. Die Berechtigung der Konstellationsmittelung unserer Summen, Doppelsummen usw. kann man auf zwei verschiedene Arten begründen. Entweder hat man es mit festen Resonatoren zu tun, deren Lagen völlig unbekannt sind. In diesem Fall kann man, nachdem das Feld in der Form (58) hingeschrieben ist, weiter nichts darüber sagen, da die Summen nicht weiter berechenbar sind. Ersetzt man nun die Summen durch ihre Konstellationsmittelwerte, so heißt das: Man ersetzt die wahren Werte der Summen durch ihre wahrscheinlichsten, wobei man sich zu denken hat, daß man die Berechnung sehr oft wiederholt, für alle mit der vorgeschriebenen Dichte verträglichen Resonatorkonstellationen. Hier ist also die Mittelung ein Zeichen für die Unkontrollierbarkeit des mikroskopischen Zustandes.

Man kann die Mittelung auch anders auffassen. Nimmt man nämlich an, daß die Resonatoren nicht fest liegen, sondern die Wärmebewegung der Gasmoleküle mitmachen, so nehmen sie, während der Beobachtungsdauer, infolge dieser regellosen Bewegung alle möglichen Konstellationen an. Die Mittelung ist dann folgendermaßen zu verstehen: In einem bestimmten Augenblick, also für eine bestimmte Konstellation, kann man schreiben:

$$\mathcal{E} = \varphi \cdot e^{i\omega t}.$$

Dabei ist die Amplitude  $\varphi$  eine Funktion der Konstellation. Da nun die Konstellation langsam veränderlich ist, im Vergleich zur Schwingungsperiode  $2\pi/\omega$ , aber immer noch schnell veränderlich im Vergleich zur Beobachtungsdauer, so ersetze

man im Laufe der Beobachtungsdauer die langsam veränderliche Amplitude  $\varphi$  durch ihren Mittelwert während dieser Beobachtungsdauer. Dieser zeitliche Mittelwert von  $\varphi$  ist dann identisch mit dem Konstellationsmittelwert von  $\varphi$ . Die so entstehende Schwingung, mit *gemittelter Amplitude*, ist dann der Konstellationsmittelwert von  $\mathfrak{E}$ .

Man kann im Zweifel sein, ob diesem etwas künstlich konstruierten Mittelwert von  $\mathfrak{E}$  physikalische Bedeutung zukommt, und ob man daher berechtigt ist, aus ihm auf den Brechungsquotienten des Mediums zu schließen.

Zwar erkennt man ohne weiteres, daß die durchgeführte Rechnung in zwei Grenzfällen zum richtigen Ergebnis führt: Nämlich erstens, wenn die Resonatordichte sehr klein ist, und zweitens, wenn die Resonatordichte sehr groß ist. Im ersten Spezialfall kann man nämlich bei der ersten Näherung stehen bleiben. Dann gelten für die  $q^s$  die Werte (45), und in dem Ausdruck (53) für das Feld im Aufpunkt bleiben nur die einfachen, über alle  $s$  erstreckten Summen stehen. Die unter den Summen stehenden Koeffizienten  $D_{11}^{0s} \dots D_{ss}^{0s}$  hängen nur ab von der Größe und Richtung der Entfernungen  $r_{0s}$  des  $s^{\text{ten}}$  Resonators vom Aufpunkt. Verlegt man den Aufpunkt in große Entfernung von der Schicht und führt die Rechnung wie im § 9 durch, so sieht man, daß die einfachen  $\sum$  sich ohne Mittelung ersetzen lassen durch diejenigen Integrale, welche die Konstellationsmittelwerte der Summen darstellen. Die wahren Werte der Summen werden dann also mit ihren Mittelwerten identisch. Daher gibt in dem Fall sehr dünner Resonatorenverteilung der Konstellationsmittelwert des Feldes auch den wahren Wert des Feldes.

In dem zweiten oben genannten Spezialfall sei die Resonatordichte so groß, daß im „physikalisch unendlich kleinen Volumenelement“ im Durchschnitt sehr viele Resonatoren liegen. Dann bleiben zwar in den Formeln (53) alle Summen stehen, und das Feld im Aufpunkt hängt daher wesentlich auch von den  $r_{ss}$ , also den Wechselwirkungen der Resonatoren ab. In diesem Falle aber kann man alle Summen durch ihre Konstellationsmittelwerte ersetzen, weil diese Konstellationsmittelung hier identisch ist mit der räumlichen Mittelung über „physikalisch unendlich kleine Gebiete“.

Es liegt hier dieselbe Mittelung vor, die H. A. Lorentz von den Gleichungen der Elektronentheorie zu den Maxwell'schen Gleichungen im Innern ponderabler Körper führte, also gleichsam der Übergang von dem atomistisch aufgebauten Medium zur homogenen Substanz.

Sieht man von den beiden betrachteten Grenzfällen ab, so bleibt bei beliebiger Resonatordichte der oben genannte Zweifel an der physikalischen Bedeutung der Konstellationsmittelwerte des Feldes bestehen.

Ich zeige daher im folgenden, wie man durch Berechnung der *mittleren Intensität* in einem weit entfernt liegenden Aufpunkt zu einwandfreiem Wege zu denselben Formeln für den Brechungsquotienten gelangt, wie durch Betrachtung des Feldmittelwertes.

### § 13. Berechnung der mittleren Intensität in einem weit entfernten Aufpunkt.

#### Rückkehr zur ursprünglichen Fassung des Problems.

Bei der folgenden Berechnung der Intensität kehre ich zu der ursprünglichen Formulierung des Problems zurück, bei der das Resonatorensystem eingeschlossen ist in einen Würfel von der Kantenlänge  $L$ . Auf diesen Würfel falle die seitlich unbegrenzte, in Richtung positiver  $x$  fortschreitende ebene polarisierte Welle:

$$(220) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x^0 = 0, \\ \mathfrak{E}_y^0 = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x)}, \\ \mathfrak{E}_z^0 = 0, \end{cases}$$

die aus (2) hervorgeht, wenn man dort

$$(221) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_z = 0, \\ \alpha = 1; \quad \beta = \gamma = 0 \end{cases}$$

setzt.

Die Lage des Würfels  $L^3$  ist aus Fig. 1 zu ersehen. Der Aufpunkt  $(x_0, 0, 0)$  liege in sehr großer Entfernung auf der positiven  $x$ -Achse, also „hinter“ dem Würfel. Nach (53) ist dann das Gesamtfeld im Aufpunkt:

$$(222) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \\ \quad \cdot \left\{ \sigma x \sum_s D_{12}^{0s} + \sigma^2 x^2 \sum_s \sum_{s'} D_{12}^{0ss'} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \\ \quad \cdot \left\{ 1 + \sigma x \sum_s D_{22}^{0s} + \sigma^2 x^2 \sum_s \sum_{s'} D_{22}^{0ss'} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 z_0)} \\ \quad \cdot \left\{ \sigma x \sum_s D_{32}^{0s} + \sigma^2 x^2 \sum_s \sum_{s'} D_{32}^{0ss'} + \dots \right\}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten  $D$  sind dabei nach (50), (51) und (52) folgendermaßen definiert:

$$(223) \quad \begin{cases} x D_{12}^{0s} &= G_{0s}, \\ x^2 D_{12}^{0ss'} &= A_{0s} G_{ss'} + G_{0s} B_{ss'} + F_{0s} E_{ss'}, \\ x^3 D_{12}^{0ss's''} &= (A_{0s} A_{ss'} + G_{0s} G_{ss'} + F_{0s} F_{ss'}) G_{s's''} \\ &\quad + (A_{0s} G_{ss'} + G_{0s} B_{ss'} + F_{0s} E_{ss'}) B_{s's''} \\ &\quad + (A_{0s} F_{ss'} + G_{0s} E_{ss'} + F_{0s} C_{ss'}) E_{s's''}, \end{cases}$$

usw.

Von den Koeffizienten mit den Indizes  $0s$  kommen dabei nur  $A_{0s}$ ,  $G_{0s}$  und  $F_{0s}$  vor.

Ferner ist

$$(224) \quad \begin{cases} x D_{22}^{0s} &= B_{0s}, \\ x^2 D_{22}^{0ss'} &= G_{0s} G_{ss'} + B_{0s} B_{ss'} + E_{0s} E_{ss'}, \\ x^3 D_{22}^{0ss's''} &= (G_{0s} A_{ss'} + B_{0s} G_{ss'} + E_{0s} F_{ss'}) G_{s's''} \\ &\quad + (G_{0s} G_{ss'} + B_{0s} B_{ss'} + E_{0s} E_{ss'}) B_{s's''} \\ &\quad + (G_{0s} F_{ss'} + B_{0s} E_{ss'} + E_{0s} C_{ss'}) E_{s's''}, \end{cases}$$

usw.

Von den Koeffizienten mit den Indizes  $0s$  kommen hier nur  $G_{0s}$ ,  $B_{0s}$  und  $E_{0s}$  vor.

Schließlich ist:

$$(225) \quad \begin{cases} x D_{32}^{0s} &= E_{0s}, \\ x^2 D_{32}^{0ss'} &= F_{0s} G_{ss'} + E_{0s} B_{ss'} + C_{0s} E_{ss'}, \end{cases}$$



$$(225) \quad \left\{ \begin{aligned} x^3 D_{32}^{0s's''} &= (F_{0s} A_{ss'} + E_{0s} G_{ss'} + C_{0s} F_{ss'}) G_{s's''} \\ &+ (F_{0s} G_{ss'} + E_{0s} B_{ss'} + C_{0s} E_{ss'}) B_{s's''} \\ &+ (F_{0s} F_{ss'} + E_{0s} E_{ss'} + C_{0s} C_{ss'}) E_{s's''} \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right.$$

Von den Koeffizienten mit den Indizes 0s kommen hier nur  $F_{0s}$ ,  $E_{0s}$  und  $C_{0s}$  vor.

Die Koeffizienten mit den Indizes 0s sind nach (24) und (162) durch folgende Ausdrücke dargestellt:

$$(226) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{0s} &= k_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{x_0 - x_s}{r_{0s}} \right)^2 \right] \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}, \\ B_{0s} &= k_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{y_s}{r_{0s}} \right)^2 \right] \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}, \\ C_{0s} &= k_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{z_s}{r_{0s}} \right)^2 \right] \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}, \\ E_{0s} &= -k_0^2 \frac{y_s z_s}{r_{0s}^3} \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}, \\ F_{0s} &= k_0^2 \frac{z_s (x_0 - x_s)}{r_{0s}^3} \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}, \\ G_{0s} &= k_0^2 \frac{(x_0 - x_s) y_s}{r_{0s}^3} \cdot \frac{e^{-i k_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \cdot e^{-i k_0 (x_s - x_0)}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist

$$(227) \quad r_{0s}^2 = (x_0 - x_s)^2 + y_s^2 + z_s^2.$$

Wählt man nun  $x_0$  so groß gegen  $x_s, y_s, z_s$ , daß man Glieder zweiter und höherer Ordnung in

$$\frac{x_s}{x_0}, \quad \frac{y_s}{x_0}, \quad \frac{z_s}{x_0}$$

vernachlässigen kann, so wird:

$$(228) \quad r_{0s} = x_0 - x_s.$$

Dann verschwinden  $A_{0s}, E_{0s}, F_{0s}, G_{0s}$  von höherer Ordnung, und es bleibt nur  $B_{0s}$  und  $C_{0s}$  übrig. Ersetzt man in der Amplitude dann noch  $r_{0s}$  einfach durch  $x_0$ , so wird in erster Näherung:

$$(229) \quad B_{0s} = C_{0s} = \frac{k_0^2}{x_0}.$$

Also verschwinden nach (228) alle Koeffizienten  $D_{1s}$  und nach (224) und (225) wird:

$$(230) \quad \begin{cases} x D_{22}^{0s} = B_{0s}, \\ x^2 D_{22}^{0ss'} = B_{0s} \cdot B_{ss'} = B_{0s} \cdot x D_{22}^{ss'}, \\ x^3 D_{22}^{0ss's''} = B_{0s} \cdot x^2 D_{22}^{ss's''} \\ \text{usw.} \end{cases}$$

$$(231) \quad \begin{cases} x D_{32}^{0s} = 0, \\ x^2 D_{32}^{0ss'} = C_{0s} E_{ss'} = C_{0s} \cdot x D_{32}^{ss'}, \\ x^3 D_{32}^{0ss's''} = C_{0s} \cdot x^2 D_{32}^{ss's''} \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Aus (222), (229), (230) und (231) folgt:

$$(232) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_x = 0, \\ \mathcal{E}_y = \mathcal{V}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \\ \quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\sigma k_0^2}{x_0} \left[ \sum_s^N 1 + \sigma x \sum_s \sum_{s'} D_{22}^{ss'} \right. \right. \\ \quad \quad \quad \left. \left. + \sigma^2 x^2 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{22}^{ss's''} + \dots \right] \right\}, \\ \mathcal{E}_z = \mathcal{V}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \\ \quad \cdot \frac{\sigma k_0^2}{x_0} \left[ \sigma x \sum_s \sum_{s'} D_{32}^{ss'} + \sigma^2 x^2 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{32}^{ss's''} + \dots \right]. \end{cases}$$

Um aus diesen Formeln für das Gesamtfeld im Aufpunkt die dort herrschende mittlere Intensität zu bilden, müssen wir folgendermaßen verfahren. Wir bilden zuerst den zeitlichen Mittelwert von  $\mathcal{E}^2$  über eine oder mehrere Perioden. Er sei mit  $\overline{\mathcal{E}^2}$  bezeichnet. Dieser Mittelwert hängt noch ab von der langsam veränderlichen Konstellation. Um daraus die beobachtete Intensität zu erhalten, müssen wir zum zweiten Male mitteln, und zwar müssen wir den Konstellationsmittelwert von  $\overline{\mathcal{E}^2}$  bilden. Dieser sei mit  $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{E}^2})$  bezeichnet. Diese Rechnungsweise ist hier erlaubt, weil die Konstellation während vieler Perioden nahezu dieselbe bleibt und sich im Vergleich zur Periode nur langsam ändert. Im Laufe einer Beobachtung aber treten alle möglichen, mit der vorgeschriebenen Resonatorendichte verträglichen Konstellationen auf.

Bezeichnet man für den Augenblick die Faktoren von  $e^{i\omega t}$  in  $\mathcal{E}_y$  und  $\mathcal{E}_z$  mit  $\varphi$  bzw.  $\psi$ , so ist bekanntlich

$$(233) \quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{E}_y^2} = \frac{1}{2} \varphi \cdot \varphi^*, \\ \overline{\mathfrak{E}_z^2} = \frac{1}{2} \psi \cdot \psi^*, \end{cases}$$

wo  $\varphi^*$  bzw.  $\psi^*$  die zu  $\varphi$  bzw.  $\psi$  konjugierten Werte darstellen.

Daher folgt in erster Näherung:

$$(234) \quad \overline{\mathfrak{E}_x^2} = 0,$$

$$(235) \quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{E}_y^2} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_y^2 \left\{ 1 + \frac{\sigma k_0^2}{x_0} \right. \\ \left[ \sum_{s=1}^N 1 + \sigma \kappa \sum_s \sum_{s'} D_{22}^{ss'} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{22}^{ss's''} + \dots \right. \\ \left. \left. + \sum_{s=1}^N 1 + \sigma \kappa \sum_s \sum_{s'} \tilde{D}_{22}^{ss'} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} \tilde{D}_{22}^{ss's''} + \dots \right] \right\}, \end{cases}$$

wenn wir hier wieder von Absorptionen absehen und daher  $\sigma$  als reell betrachten.

Die Intensität wird daher:

$$(236) \quad \begin{cases} \mathfrak{I} = \mathfrak{M}(\overline{\mathfrak{E}_y^2}) \\ = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_y^2 \left\{ 1 + \frac{\sigma k_0^2}{x_0} \left[ 2N + \sigma \kappa \mathfrak{M} \left( \sum_s \sum_{s'} D_{22}^{ss'} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma \kappa \mathfrak{M} \left( \sum_s \sum_{s'} \tilde{D}_{22}^{ss'} \right) + \dots \right] \right\}, \end{cases}$$

wo  $N$  die Gesamtzahl aller Resonatoren im Würfel ist. Nun ist

$$(237) \quad \begin{cases} \sigma \kappa \mathfrak{M} \left( \sum_s \sum_{s'} D_{22}^{ss'} \right) + \sigma^2 \kappa^2 \mathfrak{M} \left( \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{22}^{ss's''} \right) + \dots \\ = \sum_s \left\{ \sigma \kappa \mathfrak{M} \left( \sum_{s'} D_{22}^{ss'} \right) + \sigma^2 \kappa^2 \mathfrak{M} \left( \sum_{s'} \sum_{s''} D_{22}^{ss's''} \right) + \dots \right\}. \end{cases}$$

Die in (237) auftretenden Mittelwerte der Summen sind formal mit den früher berechneten identisch. Nur erstreckt sich hier die Summation nicht über eine seitlich unendlich ausgedehnte Schicht, sondern über den Würfel  $L^3$ . Man kann aber zeigen, daß, wenn nur  $L \gg \lambda_0$  und wenn man die unmittelbar an den Grenzflächen liegenden Resonatoren unberücksichtigt läßt, die Mittelwerte über den Würfel mit den früher berechneten übereinstimmen. Diese Rechnung gibt der folgende Paragraph.

§ 14. **Angenäherte Berechnung der Summenmittelwerte im ursprünglichen Problem.**

Wir berechnen die Mittelwerte der einfachen Summen  $\sum_s' A_{ss'}$  usw. Dabei wollen wir wie früher die Rechnung hier nur durchführen, indem wir über das ganze Volumen  $L^3$  mit Einschluß der Kugel um  $s$  integrieren. Ist  $\mathfrak{N}$  wieder die Verteilungsdichte der Resonatoren, so wird:

$$(238) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N} \left( \sum_s' A_{ss'} \right) &= \mathfrak{N} \int_0^L dx_s' \int_{-L/2}^{+L/2} dy_s' dz_s' \cdot e^{-i k_0 (x_s' - x_s)} \\ &\quad \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s'^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(239) \quad r_{ss'}^2 = (x_s' - x_s)^2 + (y_s' - y_s)^2 + (z_s' - z_s)^2.$$

*Erste Rechenmethode.* — Da  $r_{ss'}$  nur von den Differenzen  $(x_s' - x_s)$  usw. abhängt, so ist

$$(240) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_s'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_s'^2}.$$

Wir schalten bei der Integration nach  $x_s'$  ein schmales Gebiet in der Umgebung von  $x_s' = x_s$  aus, wo, wie wir sehen werden, eine Unstetigkeit vorliegt. Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \left( \sum_s' A_{ss'} \right) &= \mathfrak{N} e^{i k_0 x_s} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} dy_s' dz_s' \\ &\quad \left[ \int_0^{x_s - \varepsilon} dx_s' e^{-i k_0 x_s'} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s'^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_s + \varepsilon}^L dx_s' e^{-i k_0 x_s'} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s'^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right]. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration folgt:

$$(241) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N} \left( \sum_s' A_{ss'} \right) &= \mathfrak{N} e^{i k_0 x_s} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} dy_s' dz_s' \\ &\quad \left\{ \left[ e^{-i k_0 x_s'} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_s'} + i k_0 \right) \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right]_0^{x_s - \varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \left[ e^{-i k_0 x_s'} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_s'} + i k_0 \right) \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right]_{x_s + \varepsilon}^L \right\}. \end{aligned} \right.$$

Daß bei  $x_{s'} = x_s$  in der Tat eine Unstetigkeit vorliegt, sieht man wie folgt. Man schreibe:

$$(242) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Re \left( \sum_{s'} A_{ss'} \right) = \Re e^{i k_0 x_s} \cdot \left\{ e^{-i k_0 x_{s'}} \cdot \left( \frac{\partial J}{\partial x_{s'}} + i k_0 J \right) \right\}_0^L, \\ \text{wo} \\ J = \int_{-L/2}^{+L/2} dy_{s'} dz_{s'} \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}}. \end{array} \right.$$

Dann läßt sich zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial J}{\partial x_{s'}} + i k_0 J$$

an der Stelle  $x_{s'} = x_s$  einen Sprung erleidet.

*Beweis:* Wir ersetzen in  $J$  die Grenzen durch  $-\infty$  und  $+\infty$ ; wenn dann der Ausdruck

$$\frac{\partial J}{\partial x_{s'}} + i k_0 J$$

bei  $x_{s'} = x_s$  einen Sprung aufweist, so bleibt diese Unstetigkeit auch im Falle der Grenzen  $\pm L/2$  bestehen. Wir nennen:

$$(243) \quad J_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{s'} dz_{s'} \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}}.$$

1. Es sei  $x_{s'} > x_s$ . — Dann wird:

$$(244) \quad J_{\infty} = 2\pi \int_{r_{ss'} = x_{s'} - x_s}^{\infty} dr_{ss'} e^{-i k_0 r_{ss'}} = \frac{2\pi}{i k_0} e^{-i k_0 (x_{s'} - x_s)},$$

wenn wir den Beitrag der oberen Grenze  $= 0$  setzen. [Siehe Anhang I und Formel (76)]. Also wird

$$(245) \quad \frac{\partial J_{\infty}}{\partial x_{s'}} + i k_0 J_{\infty} = 0.$$

2. Es sei  $x_{s'} < x_s$ . — Dann wird:

$$(246) \quad J_{\infty} = 2\pi \int_{r_{ss'} = x_s - x_{s'}}^{\infty} dr_{ss'} e^{-i k_0 r_{ss'}} = \frac{2\pi}{i k_0} e^{-i k_0 (x_s - x_{s'})}.$$

Also:

$$(247) \quad \frac{\partial J_{\infty}}{\partial x_{s'}} + i k_0 J_{\infty} = 4\pi e^{-i k_0 (x_s - x_{s'})}.$$

Nähert sich also  $x_{s'}$  von unten her dem Werte  $x_s$ , so nähert sich

$$\frac{\partial J_{\infty}}{\partial x_{s'}} + i k_0 J_{\infty}$$

dem Werte  $4\pi$ ; nähert sich aber  $x_{s'}$  von oben her dem Werte  $x_s$ , so nähert sich

$$\frac{\partial J_{\infty}}{\partial x_{s'}} + i k_0 J_{\infty}$$

dem Werte 0.

Somit ist die Unstetigkeit des Ausdrucks

$$\frac{\partial J}{\partial x_{s'}} + i k_0 J$$

an der Stelle  $x_{s'} = x_s$  erwiesen.

Wir kehren jetzt zu (241) zurück und schreiben dafür:

$$(248) \left\{ \begin{aligned} & \Re \left( \sum_s A_{ss'} \right) \\ &= \Re e^{i k_0 x_s} \cdot \left( \left[ \int_{-L/2}^{+L/2} dy_{s'} dz_{s'} \left\{ e^{-i k_0 x_{s'}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{s'}} \left( \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{e^{-i k_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{s'}} (e^{-i k_0 x_s}) \right\} \right]_{x_{s'}=0}^{x_{s'}=x_s-s} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \dots \dots \dots \right]_{x_s+s}^L \right). \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern haben nun eine leicht angebbare Bedeutung. Denken wir uns den Würfel durch die Ebene  $x = x_{s'}$  durchschnitten und betrachten die Schnittfläche  $L^2$  als Beugungsöffnung in einem undurchlässigen Schirm, auf den in der positiven  $x$ -Richtung eine ebene Welle  $e^{-i k_0 x}$  fällt, so stellt die eckige Klammer nach dem Kirchhoffschen Prinzip das  $4\pi$ -fache der Erregung im Aufpunkt  $(x_s, y_s, z_s)$  dar. Ist dabei  $x_{s'} < x_s$ , so ist der Aufpunkt von der Lichtquelle durch die beugende Öffnung getrennt. Ist aber  $x_{s'} > x_s$ , so ist der Aufpunkt auf derselben Seite der beugenden Öffnung wie die Lichtquelle. Daher ist nach Kirchhoff:

$$(249) \quad \left[ \dots \dots \dots \right]_{x_{s'} > x_s} = 0$$

und daher auch:

$$(250) \quad \left[ \dots \right]_{x_1 + \varepsilon}^L = 0.$$

Nun ist nach unserer Voraussetzung über die Dimensionen des Würfels die beugende Öffnung  $L^3$  in allen Dimensionen groß gegen die Wellenlänge  $\lambda_0$  der einfallenden Welle. Daher kann man die Lichtbewegung im Aufpunkt hinter der Öffnung gleich der *ungestörten* ebenen Welle setzen. Also:

$$(251) \quad \left[ \dots \right]_{x_1' < x_1} = 4\pi e^{-ik_0 x_1}.$$

Daraus folgt:

$$(252) \quad \left[ \dots \right]_0^{x_1 - \varepsilon} = 0,$$

weil  $[\dots]_{x_1 - \varepsilon}$  und  $[\dots]_0$  beide nach (251) denselben Wert annehmen.

Die Gleichung (251) ist in großer Annäherung erfüllt, wenn der Aufpunkt nicht gerade in unmittelbarer Nähe der Schattengrenzen liegt, d. h. nahe den Grenzflächen des Würfels. Führt man diese Beschränkung ein, so folgt aus (248), (250) und (252):

$$(253) \quad \Re \left( \sum_{s'} A_{ss'} \right) = 0$$

in Übereinstimmung mit (79).

*Zweite Rechenmethode.* — Wir schreiben (238) in folgender Form:

$$(254) \quad \Re \left( \sum_{s'} A_{ss'} \right) = \Re e^{ik_0 x_1} \cdot \int_0^L dx_{s'} \cdot e^{-ik_0 x_{s'}} \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{s'}^2} + k_0^2 \right) J,$$

wo  $J$  durch (242) gegeben ist.

*Berechnung von  $J$ .*

$$(255) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \int_{-L/2}^{+L/2} dy_{s'} dz_{s'} \frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}}, \\ \text{wo} \quad r_{ss'}^2 = (x_{s'} - x_s)^2 + (y_{s'} - y_s)^2 + (z_{s'} - z_s)^2. \end{array} \right.$$

Bekanntlich gilt die folgende Fourierdarstellung<sup>1)</sup>:

$$(256) \quad \frac{e^{-i k_0 r_{00'}}}{r_{00'}} = -\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda(x_0' - x_0) + i\mu(y_0' - y_0) + i\nu(z_0' - z_0)} \cdot d\lambda d\mu d\nu}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} \quad (259)$$

Daher folgt:

$$(257) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= -\frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x_0' - x_0)} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu e^{-i\mu y_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\mu L}{2}\right)}{\mu} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu e^{-i\nu z_0}}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\nu L}{2}\right)}{\nu} \end{aligned} \right.$$

Setzt man:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= k_0 \lambda', \\ \mu &= k_0 \mu', \\ \nu &= k_0 \nu', \end{aligned} \right.$$

so wird:

$$(258) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= -\frac{2}{\pi^2 k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i k_0 (x_0' - x_0) \lambda'} \cdot d\lambda' \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu' e^{-i k_0 y_0 \mu'} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\mu' k_0 L}{2}\right)}{\mu'} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu' e^{-i k_0 z_0 \nu'}}{1 - \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\nu' k_0 L}{2}\right)}{\nu'} \end{aligned} \right.$$

Das Integral nach  $\nu'$  können wir folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu' e^{-i k_0 z_0 \nu'}}{1 - \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\nu' k_0 L}{2}\right)}{\nu'} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu'}{1 - \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2} \cdot \frac{e^{i\nu' k_0 (L/2 - z_0)}}{\nu'} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu'}{1 - \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2} \cdot \frac{e^{-i\nu' k_0 (L/2 + z_0)}}{\nu'} \right\}. \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. P. P. Ewald, Diss. München 1912 und Ann. d. Phys. 49. p. 18. 1916.



$$(259) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu'}{1-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2} \cdot \frac{\sin \nu' k_0 \left( \frac{L}{2} - z_s \right)}{\nu'} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu'}{1-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2} \cdot \frac{\sin \nu' k_0 \left( \frac{L}{2} + z_s \right)}{\nu'} \right\}, \end{aligned} \right. \quad (262)$$

da die beiden Integrale mit  $\cos$  fortfallen.

Liegt nun der Aufpunkt  $x, y, z_s$  nicht zu nahe an den Grenzflächen des Würfels, so sind:

$$(260) \quad \left| k_0 \left( \frac{L}{2} - z_s \right) \right| \quad \text{und} \quad \left| k_0 \left( \frac{L}{2} + z_s \right) \right| \gg 1.$$

Dann aber nehmen die beiden Integrale in (259) die Gestalt an:

$$(261) \quad \lim_{\substack{+\infty \\ -\infty}} \int d\nu' f(\nu') \cdot \frac{\sin(a\nu')}{\nu'} = \pi \cdot f(0).$$

Also wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu' e^{-i k_0 z_s \nu'}}{1-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\nu' k_0 L}{2} \right)}{\nu'} = \frac{\pi}{1-\lambda'^2-\mu'^2}.$$

Setzt man diesen Wert in (258) ein und verfährt ganz analog bei der Integration nach  $\mu'$ , so ergibt sich, wenn man

$$(262) \quad \left| k_0 \left( \frac{L}{2} - y_s \right) \right| \quad \text{und} \quad \left| k_0 \left( \frac{L}{2} + y_s \right) \right| \gg 1$$

voraussetzt:

$$(263) \quad J = -\frac{2}{k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i k_0 (x_s' - x_s) \lambda'} d\lambda'}{1-\lambda'^2} = \frac{2}{k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i k_0 (x_s' - x_s) \lambda'} d\lambda'}{(\lambda' - 1)(\lambda' + 1)}.$$

Die Integration nach  $\lambda'$  führen wir in der komplexen  $\lambda'$ -Ebene auf dem aus der Fig. 6 ersichtlichen Wege. Die Punkte  $\lambda' = \pm 1$  sind die Pole des Integranden. (262)

1. Es sei  $x_s' > x_s$ . — Dann verschiebe man den Integrationsweg ins Unendliche der positiv imaginären Halbebene. Dabei bleibt er am Pol  $\lambda' = -1$  hängen, wie aus Fig. 7 sichtlich. Dann verschwinden die Beiträge der Wegstücke im

Unendlichen und der Zuführungsstücke zu a Pol, und es bleibt der Umlauf um den Pol übrig. Daher wird:

$$(264) \quad J = \frac{2}{k_0} \cdot 2\pi i \frac{e^{-i k_0 (x'_1 - x_2)}}{(-2)} = \frac{2\pi}{i k_0} e^{-i k_0 (x'_1 - x_2)}$$

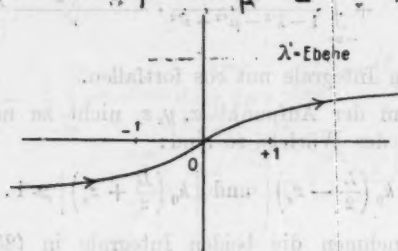


Fig. 6.

2. Es sei  $x'_1 < x_2$ . — Dann verschiebe man den Integrationsweg ins Unendliche der negativ imaginären Halbebene. Dabei bleibt er am Pol  $\lambda' = +1$  hängen, wie aus

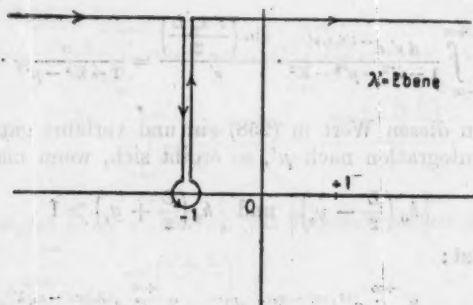


Fig. 7.

Fig. 8 ersichtlich. Auch hier bleibt nur der Beitrag übrig, der vom Umlauf um den Pol  $+1$  herrührt, und es wird daher:

$$(265) \quad J = -\frac{2}{k_0} \cdot 2\pi i \frac{e^{i k_0 (x'_1 - x_2)}}{z} = \frac{2\pi}{i k_0} e^{i k_0 (x'_1 - x_2)}$$

Man erkennt aus (264) und (265) durch Vergleich mit (244) und (246), daß  $J$  bei den hier vorausgesetzten Bedingungen (260) und (262) mit  $J_\infty$  identisch ist.

Aus (264) und (265) folgt:

$$(266) \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x_s^2} + k_0^2 J = 0$$

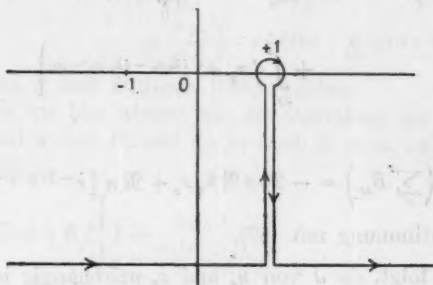


Fig. 8.

und daher nach (254):

$$(267) \quad \Re \left( \sum A_{\nu} \right) = 0$$

in Übereinstimmung mit (253).

Mit Hilfe der in (264) und (265) berechneten Werte von  $J$  ist es leicht, auch die Mittelwerte der anderen Koeffizienten zu berechnen. Es ist

$$(268) \quad \left\{ \begin{aligned} \Re \left( \sum B_{\nu} \right) &= \Re \int_0^L dx_s \int_{-L/2}^{+L/2} dy_s dx_s e^{-ik_0(x_s - x_s)} \\ &\quad \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-ik_0 r_{\nu s}}}{r_{\nu s}}. \end{aligned} \right.$$

Dafür schreiben wir:

$$\Re \left( \sum B_{\nu} \right) = \Re e^{ik_0 x_s} \cdot \int_0^L dx_s e^{-ik_0 x_s} \cdot \left( \frac{\partial^2 J}{\partial y_s^2} + k_0^2 J \right)$$

oder

$$\Re \left( \sum B_{\nu} \right) = \Re k_0^2 e^{ik_0 x_s} \cdot \int_0^L dx_s e^{-ik_0 x_s} \cdot J,$$

da  $J$  von  $y_s$  nicht abhängt.

Unter Benutzung von (264) und (265) folgt hieraus:

$$\mathfrak{M}\left(\sum_{s'} B_{ss'}\right) = \mathfrak{N} k_0^2 \cdot \frac{2\pi}{ik_0} e^{ik_0 z_s} \cdot \left\{ \int_0^{z_s} dx' e^{-ik_0 x'} + ik_0 (x_s' - z_s) \right. \\ \left. + \int_{z_s}^L dx' e^{-ik_0 x'} - ik_0 (x_s' - z_s) \right\}$$

oder

$$(269) \quad \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} B_{ss'}\right) = -2i\pi \mathfrak{N} k_0 x_s + \mathfrak{N} \pi [e^{-2ik_0(L-z_s)} - 1]$$

in Übereinstimmung mit (87).

Ferner folgt, da  $J$  von  $y_s$  und  $z_s$  unabhängig ist,

$$(270) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} C_{ss'}\right) = \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} B_{ss'}\right) \\ \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} E_{ss'}\right) = \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} F_{ss'}\right) = \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} G_{ss'}\right) = 0 \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit (88).

Ganz ebenso wie in den §§ 6 und 7 kann man auch hier einerseits den Einfluß der Kugel um den Aufpunkt, andererseits die Mittelwerte der höheren Summen berechnen. Auch diese stimmen, wie die Mittelwerte der einfachen Summen, mit den früheren Ergebnissen überein. Damit ist die Behauptung am Schlusse des § 13 bewiesen. Die in (237) auftretenden Summenmittelwerte stimmen unter den genannten Bedingungen auch ihrem Werte nach mit den früher berechneten überein.

### § 15. Die mittlere Intensität.

Wir kehren jetzt zu (236) und (237) zurück. Für die in (237) stehende Summe über  $s$  schreiben wir nach (270) und (117):

$$(271) \quad \left\{ \sum_s \left\{ \sigma \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} B_{ss'}\right) + \sigma^2 \mathfrak{M}\left(\sum_{s'} \sum_{s''} B_{ss'} B_{s's''}\right) + \dots \right\} \right. \\ \left. = \sum_s [S(x_s) - 1] \right\}$$

oder nach (154):

$$(272) \quad \left\{ \frac{(P+1) \left[ 1 - \left( \frac{P-1}{P+1} \right)^2 \cdot e^{-2ikL} \right]}{1 - \left( \frac{P-1}{P+1} \right)^2 \cdot e^{-2ikL}} \cdot \left\{ \sum_s e^{-i(k-k_0)x_s} + \frac{P-1}{P+1} \cdot e^{-2ikL} \cdot \sum_s e^{i(k+k_0)x_s} \right\} - N \right\}$$

Dabei sind  $k$  und  $P$  durch (159) gegeben.

Sehen wir hier wieder von der Dämpfung der Resonatoren ab, so wird  $\sigma$  und  $P$ , und daher auch  $k$ , reell, und man erhält nach (236):

$$(273) \quad \left\{ \Im = \frac{1}{2} \Re_y^2 \left\{ 1 + \frac{2\sigma k_0^2}{x_0(P+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sum_s e^{-i(k-k_0)x_s} + \frac{P-1}{P+1} \cdot e^{-2ikL} \cdot \sum_s e^{i(k+k_0)x_s}}{1 - \left( \frac{P-1}{P+1} \right)^2 \cdot e^{-2ikL}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sum_s e^{i(k-k_0)x_s} + \frac{P-1}{P+1} \cdot e^{2ikL} \cdot \sum_s e^{-i(k+k_0)x_s}}{1 - \left( \frac{P-1}{P+1} \right)^2 \cdot e^{2ikL}} \right\} \right\}.$$

Die Berechnung der Summation über  $s$  führt man aus wie folgt: Man teile den Würfel durch Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse in sehr dünne Schichten vom Volumen  $L^2 dx_s$ . Dabei sei  $dx_s \ll \lambda_0$ . Dann sind in einer solchen Schicht  $e^{-i(k-k_0)x_s}$  und die anderen imaginären Exponentialausdrücke nahezu konstant. Die Zahl der Summanden aber ist pro Schicht im Durchschnitt noch sehr groß, da  $L \gg \lambda_0$ . Daher kann man die Summen durch Integrale ersetzen. So wird z. B.

$$(274) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_s e^{-i(k-k_0)x_s} &= \Re L^2 \int_0^L e^{-i(k-k_0)x_s} \cdot dx_s \\ &= \Re L^2 \cdot \frac{1 - e^{-i(k-k_0)L}}{i(k-k_0)} \\ \text{Ebenso} \\ \sum_s e^{i(k-k_0)x_s} &= -\Re L^2 \frac{1 - e^{i(k-k_0)L}}{i(k-k_0)}, \\ \sum_s e^{i(k+k_0)x_s} &= -\Re L^2 \frac{1 - e^{i(k+k_0)L}}{i(k+k_0)}, \\ \sum_s e^{-i(k+k_0)x_s} &= +\Re L^2 \frac{1 - e^{-i(k+k_0)L}}{i(k+k_0)}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Werte in (273) ein, so folgt nach einiger Rechnung, unter Beachtung von (153):

$$(275) \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\lambda_0 x_0} (1 - Q) \frac{\sin(k - k_0)L + Q \sin(k + k_0)L}{1 - 2Q \cos(2kL) + Q^2} \right\},$$

wo nach (179):

$$(276) \quad Q = \left( \frac{P-1}{P+1} \right)^2 = \left( \frac{k - k_0}{k + k_0} \right)^2.$$

Ist speziell  $4\pi \mathfrak{N} |\sigma| \ll 1$ , so wird nach (197):

$$(277) \quad Q = 0$$

und

$$(278) \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\lambda_0 x_0} \sin(k - k_0)L \right\}$$

oder unter Beachtung von (153) und (197):

$$(279) \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\lambda_0 x_0} \sin(2\pi \mathfrak{N} \sigma k_0 L) \right\}.$$

Ist  $\pi \mathfrak{N} \sigma$  so klein, daß, trotzdem  $k_0 L \gg 1$ , dennoch  $2\pi \mathfrak{N} \sigma k_0 L$  noch klein gegen 1 ist, so wird:

$$(280) \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \left\{ 1 + \frac{8\pi^2 \sigma N}{\lambda_0^2 x_0} \right\},$$

wo  $N = \mathfrak{N} L^3$  die Gesamtzahl der Resonatoren im Würfel ist.

#### § 16. Vergleich mit dem entsprechenden Problem für den homogenen Körper. Der Brechungsquotient.

Um zu erkennen, welche Größe in dem Ausdruck (275) für die Intensität die Rolle des Brechungsquotienten spielt, vergleichen wir unser Ergebnis mit dem entsprechenden Intensitätsausdruck für einen homogenen Würfel vom Brechungsquotienten  $n$ . Das Problem, das wir in diesem Paragraphen behandeln wollen, lautet also so: Auf einen homogenen Würfel von der Kantenlänge  $L$  und dem Brechungsquotienten  $n$  falle eine seitlich unendlich ausgedehnte, in Richtung positiver  $x$  fortschreitende ebene Welle. Es soll die Intensität in großer Entfernung auf der  $x$ -Achse berechnet werden.

Es ist einstweilen nicht möglich, dieses Beugungsproblem exakt zu berechnen. Daher nehmen wir unsere Zuflucht zum Kirchhoffschen Prinzip.

Wir trennen den Aufpunkt  $P(x_0, 0, 0)$  (vgl. Fig. 9) durch die Fläche  $SS$  von der Lichtquelle. Nun sei die  $y$ -Komponente der elektrischen Kraft:

$$(281) \quad \mathcal{E}_y = e^{i\omega t} \cdot \varphi.$$

Dann ist für die einfallende Welle:

$$(282) \quad \varphi = \mathfrak{A}_y \cdot e^{-ik_0 x}$$

und der Wert von  $\varphi$  im Aufpunkt ist gegeben durch:

$$(283) \quad \varphi_P = \hat{\varphi}_P + \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left\{ (\varphi - \hat{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) - \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cdot \frac{\partial (\varphi - \hat{\varphi})}{\partial \nu} \right\}.$$

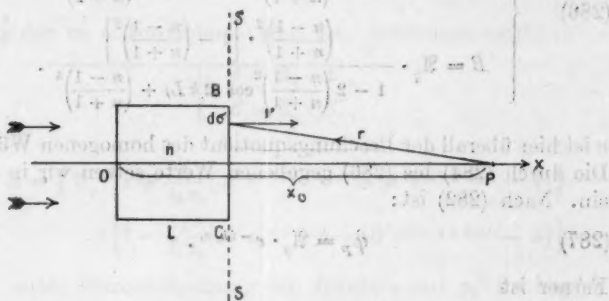


Fig. 9.

Dabei ist  $\hat{\varphi}$  der Wert von  $\varphi$  bei ungestörter Ausbreitung; die Integration ist über die Würfelfläche  $BC$  mit der inneren Normalen  $\nu = +x$  zu erstrecken.  $r$  ist der Abstand  $\overrightarrow{Pd\sigma}$  vom Aufpunkt  $(x_0, 0, 0)$  zum Integrationselement.

Die Randwerte von  $\varphi$  und  $\partial\varphi/\partial\nu$  auf der Rückseite  $BC$  des Würfels sind von vornherein nicht bekannt. Setzen wir aber voraus, daß  $L \gg \lambda_0$ , so dürfen wir mit Kirchhoff die Annahme machen, daß diese Werte in erster Näherung übereinstimmen mit den Werten, die  $\varphi$  und  $\partial\varphi/\partial\nu$  auf der Rückseite einer seitlich unendlich ausgedehnten Platte von der Dicke  $L$  (in der  $x$ -Richtung) annehmen würden, daß wir also für die Randwerte die Werte des entsprechenden beugungslosen Falles einsetzen dürfen.

Diesen beugungslosen Fall haben wir in § 10 berechnet und können daher die betreffenden Randwerte aus der Formel (186) entnehmen. Es folgt, wenn wir dort  $D$  durch  $L$  ersetzen:

$$(284) \quad \begin{cases} \varphi_{x_0=L} = A e^{-ikL} - B e^{ikL}, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x_0=L} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x_0=L} = -i k_0 \varphi_{x_0=L}. \end{cases}$$

Dabei ist

$$(285) \quad k = n \cdot k_0$$

und

$$(286) \quad \begin{cases} A = \mathfrak{A}_y \cdot \frac{1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2}{1 - 2 \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cos(2kL) + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^4}, \\ B = \mathfrak{A}_y \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right]}{1 - 2 \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cos(2kL) + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^4}. \end{cases}$$

$n$  ist hier überall der Brechungsquotient des homogenen Würfels. Die durch (284) bis (286) gegebenen Werte setzen wir in (288) ein. Nach (282) ist:

$$(287) \quad \hat{\varphi}_P = \mathfrak{A}_y \cdot e^{-ik_0 x_0}.$$

Ferner ist

$$r^2 = (x_0 - L)^2 + y^2 + z^2.$$

Ist  $x_0$  groß gegen  $L$ ,  $y$ ,  $z$ , so folgt in erster Näherung:

$$(288) \quad r = x_0 - L.$$

Das Integral in (288) wird daher:

$$(289) \quad \left\{ \int d\sigma \{ \dots \} = \int_{-L/2}^{+L/2} \int dy dz \left\{ -(\varphi - \hat{\varphi}) i k_0 \cos(r\varphi) - \frac{\varphi - \hat{\varphi}}{r} \cos(r\varphi) - \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cdot \frac{\partial(\varphi - \hat{\varphi})}{\partial \nu} \right\} \right\}.$$

In erster Näherung kann man setzen:

$$\cos(r\varphi) = -1.$$

Ferner kann man in der Amplitude  $1/r$  ersetzen durch  $1/x_0$ , und das zweite Glied in der geschweiften Klammer vernachlässigen. Dann wird:



$$\int d\sigma \{ \dots \} = \frac{e^{-ik_0(x_0-L)}}{x_0} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} dy dz \cdot 2ik_0 [\varphi - \bar{\varphi}]_{z=L} \\ = \frac{2ik_0 L^2}{x_0} \cdot e^{-ik_0(x_0-L)} \cdot \{ A e^{-i(k-k_0)L} - B e^{i(k+k_0)L} - \mathfrak{A}_y e^{-ik_0 L} \}.$$

Also:

$$(290) \quad \varphi_P = e^{-ik_0 x_0} \cdot \left\{ \mathfrak{A}_y + i \frac{L^2}{\lambda_0 x_0} [A e^{-i(k-k_0)L} - B e^{i(k+k_0)L} - \mathfrak{A}_y] \right\}.$$

Aus (281) folgt nun für die Intensität im Aufpunkt:

$$(291) \quad \mathfrak{I} = \overline{\mathfrak{I}}_y = \frac{1}{2} \varphi_P \cdot \bar{\varphi}_P,$$

wo  $\bar{\varphi}$  der zu  $\varphi$  konjugierte Wert ist. Setzt man noch:

$$\begin{cases} A = \mathfrak{A}_y \cdot A', \\ B = \mathfrak{A}_y \cdot B', \end{cases} \text{ so wird}$$

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_y^2 \left\{ 1 + \frac{iL^2}{\lambda_0 x_0} [A' e^{-i(k-k_0)L} - B' e^{i(k+k_0)L} - 1] \right. \\ \left. \cdot \left\{ 1 - \frac{iL^2}{\lambda_0 x_0} [A' e^{i(k-k_0)L} - B' e^{-i(k+k_0)L} - 1] \right\} \right\}$$

oder unter Vernachlässigung von Gliedern mit  $x_0^2$  im Nenner:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_y^2 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\lambda_0 x_0} [A' \sin(k-k_0)L + B' \sin(k+k_0)L] \right\}.$$

Setzt man hier die Werte von  $A'$  und  $B'$  ein, so folgt schließlich:

$$(292) \quad \left\{ \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_y^2 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\lambda_0 x_0} \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right] \frac{\sin(k-k_0)L + \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \cdot \sin(k+k_0)L}{1 - 2 \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \cdot \cos(2kL) + \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^4} \right\} \right\}.$$

Dabei ist  $k$  durch (285) definiert:

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (275) und (276), so sieht man, daß sie übereinstimmen, wenn man setzt:

$$(293) \quad n = P = \sqrt{1 + 4\pi \mathfrak{R} \sigma}.$$

Diese Beziehung ist mit der oben abgeleiteten Formel (189) und (190) identisch.

## Zusammenfassung.

I. Das aus den Schwingungsgleichungen der Elektronen in einem gasförmigen dispergierenden Medium folgende System linearer inhomogener Gleichungen wird durch ein Verfahren sukzessiver Näherungen in Form von Reihen gelöst. Die erste Näherung ist dabei der Fall unendlicher Verdünnung.

II. Die Mittelwerte der Reihenglieder (d. h. der aufeinander folgenden Näherungen) werden berechnet. Die Summierung der gemittelten Reihe wird auf die Lösung einer linearen inhomogenen Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern zurückgeführt.

III. Die Lösung der Integralgleichung liefert direkt die Mittelwerte der Elektronenverschiebungen. Aus diesen wird das Feld in einem weit entfernten Aufpunkt berechnet und mit den entsprechenden Formeln für den homogenen Körper verglichen.

IV. Es folgen dann für den Brechungsquotienten des Gases die Drude-Voigtschen Formeln, die durch die genauere Berechnung des „erregenden Feldes“ in bekannter Weise vervollständigt werden.

V. Die Art der Mittelwertbildung wird diskutiert und ihre Berechtigung durch die Berechnung der *mittleren Intensität* in einem entfernten Aufpunkt geprüft. Dabei ergeben sich dieselben Dispersionsformeln wie aus der Betrachtung des *Feldmittelwertes*.

## Anhang I.

Es handelt sich um den Wert des Integrals

$$(1) \quad J = \int_0^{\infty} e^{-ik_0 r} dr,$$

das an der oberen Grenze unbestimmt wird.

Eine ähnliche Schwierigkeit begegnet einem bekanntlich in der Beugungstheorie. Berechnet man dort die beugende Wirkung einer kreisförmigen Öffnung vom Radius  $R$  auf der Achse (vgl. Fig. 10), so kommt es dabei im wesentlichen an auf die Berechnung des Integrals

$$(2) \quad J_1 = \int d\sigma \frac{e^{-ik_0 r}}{r},$$

erstreckt über die Fläche der Öffnung. Da nun

$$d\sigma = 2\pi \varrho d\varrho = 2\pi r dr,$$

so wird

$$(3) \quad J_1 = 2\pi \cdot \int_{x_0}^{\sqrt{R^2 + x_0^2}} e^{-ik_0 r} dr,$$

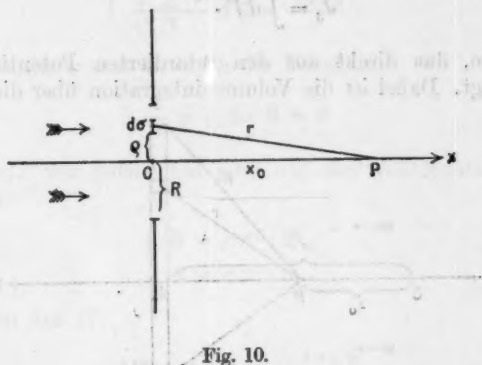


Fig. 10.

Läßt man  $R$  ins Unendliche wachsen, so geht  $J_1$  über in

$$(4) \quad J_1 = 2\pi \int_{x_0}^{\infty} e^{-ik_0 r} dr,$$

das, bis auf einen Faktor, mit  $J$  identisch ist.

Da jetzt die beugende Öffnung unendlich groß ist, so muß man die ungestörte ebene Welle erwarten, d. h. bis auf einen Faktor,  $e^{-ik_0 x_0}$ . Dieses Resultat folgt aus (4) nur, wenn man den Beitrag der oberen Grenze fortläßt. Das Auftreten dieser Unbestimmtheit rührt bekanntlich daher, daß bei unendlich großer Öffnung die benutzte Integrationsfläche, nämlich die  $yz$ -Ebene, den Aufpunkt  $P$  nicht vollständig im Sinne des Kirchhoffschen Prinzips von der Lichtquelle abschließt. Man muß hier noch etwa Teile der unendlich großen Kugel um  $P$  als Ergänzungsfläche hinzunehmen, um  $P$  vollständig abzuschließen, und über diese Ergänzungsfläche

mit integrieren. Dann verschwindet die Unbestimmtheit, und man erhält eindeutig  $e^{-ik_0 z_0}$ , bis auf einen Faktor.

Ganz ähnlich liegt die Sache in unserem Fall. Hier handelt es sich um die Berechnung des Feldes, das eine sehr schmale Schicht von Dipolen bei äußerer Anregung in einem Aufpunkt auf der Achse erzeugt. Auch hier kommt, wenn man zur Berechnung des Feldes in  $P$  (vgl. Fig. 11) etwa das Vektorpotential dort bildet, im wesentlichen das Integral

$$(5) \quad J_3 = \int dV \cdot \frac{e^{-ik_0 r}}{r}$$

in Frage, das direkt aus den retardierten Potentialformeln entspringt. Dabei ist die Volumenintegration über die Schicht

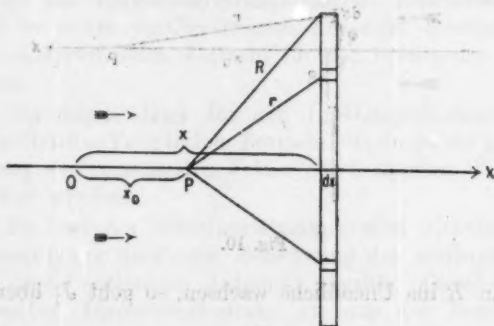


Fig. 11.

erstreckt. Hat man nun  $\mathfrak{N}$  Dipole pro Volumeneinheit, so wird

$$(6) \quad J_3 = 2\pi \mathfrak{N} dx \int_{z-z_0}^R e^{-ik_0 r} dr.$$

Läßt man die Schicht seitlich ins Unendliche wachsen, so wird  $R = \infty$  und damit  $J_3$  bis auf einen Faktor mit  $J$  identisch. Auch hier tritt also die besprochene Unbestimmtheit auf.

Diese Unbestimmtheit rührt daher, daß in den Fällen, wo im Unendlichen elektrische Ladungen vorhanden sind, wie z. B. in unserem Fall einer sich ins Unendliche erstreckenden Dipolschicht, die einfachen Formeln der retardierten Potentiale versagen und noch durch Oberflächenintegrale

über die unendlich große Kugel um den Aufpunkt ergänzt werden müssen. Zur näheren Erläuterung mögen die folgenden Betrachtungen dienen.

Sind  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$  die beiden elektromagnetischen Potentiale,  $\varrho$  und  $\varrho v$  Ladungsdichte und Konvektionsstrom, so gelten bekanntlich die folgenden Differentialgleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \Delta \varphi = 4\pi \varrho, \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} - \Delta \mathfrak{A} = \frac{4\pi \varrho v}{c}. \end{cases}$$

Dabei hängen  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$  durch die Beziehung

$$(8) \quad \frac{1}{c} \dot{\varphi} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

zusammen. Wir betrachten jetzt nur das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$ . Setzt man:

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = e^{i\omega t} \cdot \mathfrak{B}, \\ v = e^{i\omega t} \cdot w, \end{cases}$$

dann folgt aus (7):

$$(10) \quad \Delta \mathfrak{B} + k_0^2 \mathfrak{B} = -\frac{4\pi \varrho w}{c},$$

wo

$$(11) \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung (7) für  $\mathfrak{A}$  ist 1):

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \int \frac{\left[ \frac{\varrho v}{c} \right]_{t-\frac{r}{c}}}{r} \cdot dV \\ + \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \nu} - \mathfrak{A} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial \nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right\}_{t-\frac{r}{c}}. \end{cases}$$

Dabei ist das Volumenintegral über alle Teile des unendlichen Raumes zu erstrecken, wo  $\varrho v$  von Null verschieden

1) Vgl. z. B. Enzyklop. d. math. Wiss. V. 14. p. 158.

ist, das Oberflächenintegral über eine den Aufpunkt umschließende unendlich große Kugelfläche mit der äußeren Normalen  $\nu$ .

$r$  ist der Abstand des Integrationselementes ( $dV$  oder  $d\sigma$ ) vom Aufpunkt.

Wäre die Dipolschicht in allen ihren Dimensionen endlich, so würde das Oberflächenintegral verschwinden. Dann erhält man die übliche retardierte Potentialformel. Dies ist der gewöhnlich betrachtete Fall. Erstreckt sich aber die Dipolschicht ins Unendliche, so muß der Beitrag des Oberflächenintegrals berücksichtigt werden, wenn man nicht zu Unbestimmtheiten gelangen will.

Führt man in (12)  $\mathfrak{B}$  ein, mit Hilfe von (9), so wird:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{c} \int \frac{e w}{r} e^{-i k_0 r} dV \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \nu} - \mathfrak{B} \frac{\partial \left( \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \right)}{\partial \nu} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wird die Dipolschicht erregt durch eine ebene, in positiver  $x$ -Richtung fortschreitende Welle, so ist bis auf einen belanglosen Faktor zu setzen:

$$(14) \quad w = e^{-i k_0 x},$$

und das erste Glied rechts in (13) wird:

$$(15) \quad \begin{aligned} &2\pi \Re dx \cdot \frac{s}{c} e^{-i k_0 x} \cdot \int_{x-x_0}^R e^{-i k_0 r} dr \\ &= \frac{2\pi \Re s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 (2x-x_0)} - \frac{2\pi \Re s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 x - i k_0 R}, \end{aligned}$$

wenn, wie in der Fig. 12, der Aufpunkt  $P$  links von der Schicht (vor der Schicht) liegt.

Das erste Glied hat dagegen den Wert:

$$(15a) \quad \begin{aligned} &2\pi \Re dx \cdot \frac{s}{c} e^{-i k_0 x} \cdot \int_{x_0-x}^R e^{-i k_0 r} dr \\ &= \frac{2\pi \Re s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 x_0} - \frac{2\pi \Re s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 x - i k_0 R}, \end{aligned}$$

wenn der Aufpunkt  $P$  rechts von der Schicht (hinter der Schicht) liegt.

Dabei ist  $e$  die Ladung des Dipols,  $\mathcal{R}$  ist ihre Zahl pro Volumeneinheit. Das zweite Glied in (15) und (15a), das von der oberen Grenze  $R$  des Integrals herrührt, wird unbestimmt für  $\lim R = \infty$ .

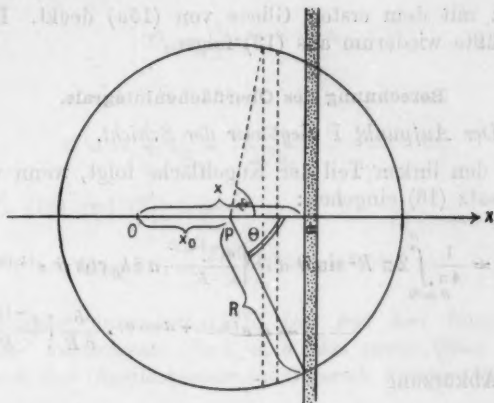


Fig. 12.

Wir berechnen jetzt das Oberflächenintegral in (13), das wir über eine den Aufpunkt  $P$  umgebende Kugel vom unendlich großen Radius  $R$  erstrecken.

Da bei seitlich unendlich ausgedehnter Schicht  $\mathfrak{B}$  nur von  $x$  abhängen kann, so machen wir für den Raum links von der Schicht den folgenden Ansatz:

$$(16) \quad \mathfrak{B}(\xi, \eta, \xi) = \frac{2\pi \mathcal{R} s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 (2x - \xi)}.$$

Dieser Ansatz deckt sich mit dem aus dem Raumintegral in (15) berechneten ersten Gliede. Wenn dieser Ansatz zutrifft, so ist im Aufpunkt  $P(x_0, 0, 0)$ :

$$(17) \quad \mathfrak{B}(x_0, 0, 0) = \frac{2\pi \mathcal{R} s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 (2x - x_0)}.$$

Andererseits muß dann derselbe Wert aus (13) folgen.

Für den Raum rechts von der Schicht setzen wir an:

$$(18) \quad \mathfrak{B}(\xi, \eta, \xi) = \frac{2\pi \mathcal{R} s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 \xi}.$$



Für einen Aufpunkt hinter der Schicht würde aus diesem Ansatz folgen:

$$(19) \quad \mathfrak{B}(x_0 \ 0 \ 0) = \frac{2\pi \Re s \, dx}{i c k_0} e^{-i k_0 x_0},$$

was sich mit dem ersten Gliede von (15a) deckt. Derselbe Wert müßte wiederum aus (19) folgen.

#### Berechnung des Oberflächenintegrals.

##### 1. Der Aufpunkt $P$ liegt vor der Schicht.

Für den linken Teil der Kugelfläche folgt, wenn wir mit dem Ansatz (16) eingehen:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} O_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} 2\pi R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \left\{ \frac{e^{-i k_0 R}}{R} a i k_0 \cos \vartheta e^{i k_0 (x_0 + R \cos \vartheta)} \right. \\ \left. - a e^{i k_0 (x_0 + R \cos \vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-i k_0 R}}{R} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo zur Abkürzung

$$(21) \quad \frac{2\pi \Re s \, dx}{i c k_0} \cdot e^{-2i k_0 x} = a$$

gesetzt ist, und

$$(22) \quad \cos \Theta = \frac{x - x_0}{R}.$$

Behält man nur Glieder höchster Ordnung bei, so folgt:

$$(23) \quad \begin{aligned} O_1 &= \frac{a i k_0 R}{2} \cdot e^{i k_0 (x_0 - R)} \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta (1 + \cos \vartheta) e^{i k_0 R \cos \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{a}{2} e^{i k_0 (x - R)}. \end{aligned}$$

Für den rechten Teil der Kugelfläche folgt, wenn man den Ansatz (18) benutzt:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} O_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} 2\pi R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \left\{ - \frac{e^{-i k_0 R}}{R} \cdot b i k_0 \cos \vartheta \cdot e^{-i k_0 (x_0 + R \cos \vartheta)} \right. \\ \left. - b e^{-i k_0 (x_0 + R \cos \vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-i k_0 R}}{R} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$



wo

$$(25) \quad b = \frac{2\pi N s dx}{i c k_0}.$$

Vernachlässigt man wieder Glieder höherer Ordnung, so folgt:

$$(26) \quad O_2 = \frac{b}{2} e^{-i k_0 (x+B)},$$

also

$$(27) \quad O = O_1 + O_2 = \frac{2\pi N s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 (x+B)}.$$

Aus (13), (15) und (27) folgt:

$$(28) \quad \mathfrak{B}(x_0 0 0) = \frac{2\pi N s dx}{i e k_0} \cdot e^{-i k_0 (2\pi - x_0)}$$

in Übereinstimmung mit (17). Das aus dem Raumintegral entstehende unbestimmte Glied, d. h. das zweite Glied in (15), wird durch das Oberflächenintegral  $O$  gerade kompensiert.

## 2. Der Aufpunkt $P$ liegt hinter der Schicht.

Das Oberflächenintegral  $O$  hat hier denselben Wert wie im Fall 1, kompensiert daher wiederum das zweite unbestimmte Glied des Raumintegrals in (15a). Daher folgt:

$$(29) \quad \mathfrak{B}(x_0 0 0) = \frac{2\pi N s dx}{i c k_0} e^{-i k_0 x_0}$$

in Übereinstimmung mit (19).

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, daß man bei seitlich unendlich ausgedehnter Schicht die elektromagnetischen Potentiale und das Feld aus den gewöhnlichen retardierten Potentialformeln nur dann ableiten kann, wenn man den unbestimmten Beitrag der oberen Grenze fortläßt. Seine Erklärung findet dies im Text angewandte Verfahren in der Tatsache, daß das hier auftretende Oberflächenintegral den Beitrag der oberen Grenze des Raumintegrals gerade aufhebt.

## Anhang II.

Es handelt sich darum, zu zeigen, daß man die im Text in Formel (160) auftretenden Summen durch entsprechende Integrale über das Volumen der Schicht ersetzen kann.

Die im Text, Formel (162), aufgezählten Koeffizienten kann man nach (14) schreiben wie folgt:

$$(1) \quad \begin{cases} B_{0s} = \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}}, \\ C_{0s} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + k_0^2 \right) \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}}, \\ E_{0s} = \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial x_0} \left( \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \right), \\ F_{0s} = \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_0} \left( \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \right), \\ G_{0s} = \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} \left( \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} \right). \end{cases}$$

Daher ist:

$$(2) \quad R_- = \sum_{s=1}^N e^{-ikx_s} \cdot B_{0s} = \left( \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + k_0^2 \right) \sum_{s=1}^N e^{-ikx_s} \cdot \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}}$$

und entsprechend lassen sich die anderen Summen in (160) alle herleiten aus der Summe:

$$(3) \quad \Sigma = \sum_{s=1}^N e^{-ikx_s} \cdot \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}}.$$

Wir werden beweisen, daß man für genügend weit von der Schicht entfernte Aufpunkte diese Summe  $\Sigma$  stets durch ein Integral ersetzen kann.

Wir zeigen zuerst, daß es stets möglich ist, den Gasraum so in Parzellen zu zerlegen, daß für jede Parzelle die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Für irgend zwei in *einer* Parzelle liegende Dipole soll der Ausdruck  $(kx_s + k_0 r_{0s})$  sich um nur sehr kleine Bruchteile von  $2\pi$  unterscheiden.

2. Die Zahl der Dipole in jeder Parzelle soll groß gegen 1 sein.

Die erste Bedingung formulieren wir so: Bezeichnet man zwei in einer Parzelle liegende Dipole mit den Indizes 1 und 2, so soll gelten:

$$(4) \quad k(x_2 - x_1) + k_0(r_{02} - r_{01}) \ll 2\pi.$$

Nun ist, wie wir im Text ableiten,

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n,$$

wo  $n$  der Brechungsquotient ist. Bei Gasen und Dämpfen ist, selbst im Absorptionsstreifen,  $n$  stets nahe bei 1. Daher ist die Ungleichung sicher erfüllt, wenn:

$$(5) \quad |x_2 - x_1| \ll \lambda_0$$

und

$$(6) \quad |x_2 - x_1 + r_{02} - r_{01}| \ll \lambda_0.$$

Wir teilen daher zuerst unser Gasvolumen durch Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse in dünne Schichten von der Dicke  $\Delta x$ . Dabei sei:

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{\lambda_0}{A}, \\ \text{wo} \\ A \gg 1. \end{cases}$$

Dann ist für zwei Dipole, die in einer solchen Schicht liegen, die Forderung (5) erfüllt. Um auch (6) zu erfüllen, unterteilen wir die Schichten weiter in Ringe vom inneren Radius  $\varrho$  und der Breite  $\Delta \varrho$  (vgl. Fig. 18).

Wir setzen:

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = x + \delta_1 \cdot \Delta x, \\ x_2 = x + \delta_2 \cdot \Delta x, \\ \varrho_1 = \varrho + \varepsilon_1 \cdot \Delta \varrho, \\ \varrho_2 = \varrho + \varepsilon_2 \cdot \Delta \varrho, \end{cases} \quad \text{wo} \quad 0 \leq \begin{cases} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} \leq 1.$$

Ferner seien die beiden Dipole 1 und 2 so numeriert, daß

$$(9) \quad \begin{cases} \delta_2 \geq \delta_1, \\ \text{also} \\ x_2 \geq x_1. \end{cases}$$



Daher:

$$r_{02} - r_{01} = \frac{q \Delta q (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - (x_0 - x) \Delta x (\delta_2 - \delta_1)}{r},$$

folglich:

$$(15) \quad \begin{cases} \Delta = (x_2 - x_1) + (r_{02} - r_{01}) \\ = \frac{q \Delta q}{r} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \Delta x \left(1 - \frac{x_0 - x}{r}\right) (\delta_2 - \delta_1). \end{cases}$$

Da nach (9) das zweite Glied  $\geq 0$ , so hat  $|\Delta|$  seinen größten Wert, wenn:

$$(16) \quad \delta_2 = 1; \delta_1 = 0; \varepsilon_2 = 1; \varepsilon_1 = 0.$$

Dann ist:

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta_{\max} = \frac{q \Delta q}{r} + \Delta x \left(1 - \frac{x_0 - x}{r}\right) \\ = \Delta q \cdot \sin \varphi + \Delta x (1 - \cos \varphi). \end{cases}$$

Daher ist die Forderung (6) erfüllt, wenn

$$(18) \quad \Delta_{\max} = \Delta q \cdot \sin \varphi + \Delta x (1 - \cos \varphi) \leq \lambda_0.$$

Wir setzen nun:

$$(19) \quad \Delta_{\max} \cong \frac{\lambda_0}{A},$$

wo  $A > 1$  die auch in (7) auftretende große Zahl bedeutet. Dann folgt aus (7), (17) und (19):

$$(20) \quad \Delta q \cong \frac{\lambda_0}{A \operatorname{tg} \varphi}.$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, so ist auch (6) erfüllt, und damit die erste Forderung.

Die zweite Forderung verlangt, daß in jeder Parzelle sehr viele Dipole liegen. Das Volumen einer Ringparzelle ist aber:  $2\pi \Delta x \cdot \Delta q (q + \frac{1}{2} \Delta q)$ .

Ist daher  $\mathcal{N}$  die Zahl der Dipole pro Volumeneinheit, so kann man die zweite Forderung so formulieren: Es soll für alle Parzellen:

$$(21) \quad 2\pi \mathcal{N} \Delta x \Delta q (q + \frac{1}{2} \Delta q) \geq B$$

sein, wo

$$(22) \quad B \geq 1.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(23) \quad \frac{AB}{2\pi \Re \lambda_0} = C,$$

so folgt aus (7) und (21):

$$(24) \quad \Delta \varrho \geq \sqrt{\varrho^2 + 2C} - \varrho.$$

Sind die Ungleichungen (20) und (24) erfüllt, so erfüllt die Parzelleneinteilung die beiden gestellten Forderungen. Damit (20) und (24) miteinander verträglich sind, muß:

$$(25) \quad \frac{\lambda_0}{A \operatorname{tg} \varphi} \geq \sqrt{\varrho^2 + 2C} - \varrho$$

sein. Oder:

$$(26) \quad x_0 - x \geq \frac{A}{\lambda_0} \varrho [\sqrt{\varrho^2 + 2C} - \varrho].$$

Den größten Wert nimmt die rechte Seite für  $\varrho = \infty$  an. Dieser Wert ist  $AC/\lambda_0$ . Daher ist (26) sicher erfüllt, wenn man setzt:

$$(27) \quad x_0 - x \geq \frac{AC}{\lambda_0} \left( = \frac{A^2 B}{2\pi \Re \lambda_0^2} \right).$$

Sind also die Zahlen  $A$  und  $B$  vorgegeben, so kann man stets durch hinreichend große Wahl von  $x_0$  der Bedingung (27) genügen. Dann sind (20) und (24) miteinander verträglich, und man kann sie vereinigen wie folgt:

$$(28) \quad \sqrt{\varrho^2 + 2C} - \varrho \leq \Delta \varrho \leq \frac{\lambda_0(x_0 - x)}{A \varphi}.$$

Zusammenfassend kann man sagen: Wählt man bei gegebenem  $\Re$  und  $\lambda_0$  zwei beliebige große Zahlen  $A$  und  $B$ , teilt man dann den Gasraum in Schichten von der Dicke  $\lambda_0/A$ , wählt man den Abstand des Aufpunktes von den Schichten so groß, daß (27) erfüllt ist, und teilt jede Schicht in Ringparzellen von der Größe

$$2\pi \frac{\lambda_0}{A} \Delta \varrho (\varrho + \frac{1}{2} \Delta \varrho),$$

wobei  $\Delta \varrho$  die Bedingung (28) erfüllt, so ist erstens die Anzahl der Dipole in jeder Parzelle  $\geq B$ , und zweitens unter

scheidet sich für irgend zwei in einer Parzelle liegende Dipole der Ausdruck  $(k x_s + k_0 r_{0s})$  höchstens um Größen von der Ordnung  $2\pi/\Delta$ .

Wir wollen im folgenden, um die Ideen zu fixieren, die Parzelleneinteilung in ganz bestimmter Weise vornehmen. Wir teilen also zuerst in Schichten von der Dicke

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{A}$$

und dann machen wir die Ringeinteilung derart, daß für jede Parzelle

$$(29) \quad \Delta \varrho = \sqrt{\varrho^2 + 2C} - \varrho$$

wird. Den Aufpunkt wählen wir so entfernt, daß der Bedingung (27) für alle Schichten ( $x$ ) genügt wird.

Der Radius des ersten Ringes, der die  $x$ -Achse unmittelbar umgibt, ist  $\varrho_0 = 0$ ; hierzu gehört nach (29) die Ringbreite:

$$\Delta \varrho_1 = \sqrt{2C}.$$

Der Radius des zweiten Ringes ist also:

$$\varrho_1 = \varrho_0 + \Delta \varrho_1 = \sqrt{2C}$$

und die dazu gehörige Ringbreite nach (29):

$$\Delta \varrho_2 = \sqrt{2C} (\sqrt{2} - \sqrt{1}).$$

Der Radius des dritten Ringes ist also:

$$\varrho_2 = \varrho_1 + \Delta \varrho_2 = \sqrt{4C}$$

und die dazu gehörige Ringbreite nach (29):

$$\Delta \varrho_3 = \sqrt{2C} (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

In dieser Weise fortfahrend, gelangt man zu dem folgenden Ergebnis. Der Radius des  $(p+1)^{\text{ten}}$  Ringes ist:

$$(30) \quad \varrho_p = \sqrt{2pC}$$

und die Breite dieses Ringes ist:

$$(31) \quad \Delta \varrho_{p+1} = \sqrt{2C} (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}).$$

Das Volumen der so entstehenden Parzellen ist:

$$2\pi \Delta x \cdot \Delta \varrho_{p+1} (\varrho_p + \frac{1}{2} \Delta \varrho_{p+1}) = 2\pi \Delta x \cdot C = \frac{B}{\mathfrak{A}}. \quad (32)$$

Das Volumen aller Parzellen ist also gleich, die durchschnittliche Zahl der Dipole in jeder Parzelle  $= B$ . Da unsere Parzelleneinteilung die erste Forderung erfüllt, so können wir für alle Dipole in der  $(p+1)^{\text{ten}}$  Parzelle  $r_0$ , bis auf Größen höherer Ordnung ersetzen durch:

$$r_p = \sqrt{(x_0 - x)^2 + \varrho_p^2} \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Ebenso ist nach (30):

$$r_{p+1} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + \varrho_{p+1}^2} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + 2pC + 2C}.$$

Nun kann man aber zeigen, daß

$$2C \ll (x_0 - x)^2 + 2pC \quad \text{für alle } p.$$

*Beweis:* Der Quotient

$$\frac{2C}{(x_0 - x)^2}$$

ist nach (27)

$$\cong \frac{2\lambda_0^2}{A^2 C},$$

oder:

$$\frac{2C}{(x_0 - x)^2} \cong \frac{4\pi \Re \lambda_0^2}{A^2 \cdot B}.$$

Die rechtsstehende Größe aber kann durch hinreichend große Wahl von  $A$  und  $B$  bei gegebenem  $\Re$  und  $\lambda_0$  stets klein gegen 1 gemacht werden. Daher ist

$$2C \ll (x_0 - x)^2$$

und um so mehr:

$$2C \ll (x_0 - x)^2 + 2pC.$$

Was zu beweisen war.

Man kann daher schreiben:

$$r_{p+1} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + 2pC} \left[ 1 + \frac{C}{(x_0 - x)^2 + 2pC} \right],$$

oder:

$$(32) \quad r_{p+1} = r_p + \frac{C}{r_p}.$$



Daher:

$$(33) \quad r_{p+1} - r_p = \Delta r_p = \frac{C}{r_p},$$

also:

$$(34) \quad \frac{\Delta r_p}{r_p} = \frac{C}{r_p^2} < \frac{C}{(x_0 - x)^2} \ll 1,$$

d. h. geht man von einer Parzelle zur nächsten über, so ändert sich  $r_p$  relativ nur äußerst wenig. Wir betrachten jetzt den Quotienten:

$$(35) \quad \frac{e^{-ik_0 r_{p+1}}}{e^{-ik_0 r_p}} = e^{-ik_0 \frac{C}{r_p}}.$$

Nun ist:

$$(36) \quad \frac{k_0 C}{r_p} < \frac{k_0 C}{x_0 - x} \equiv \frac{2\pi}{A}$$

nach (28) und (27). D. h.

$$(37) \quad \frac{k_0 C}{r_p} \ll 2\pi.$$

Daher ändert sich, wenn man von einer Parzelle zur nächsten übergeht, auch  $e^{-ik_0 r_p}$ , und folglich auch

$$\frac{e^{-ik_0 r_p}}{r_p}$$

relativ nur verschwindend wenig.

Daher kann man, wenn man *den* Teil der Summe  $\Sigma$ , der den Beitrag der Schicht  $\Delta x$  bei  $x$  darstellt, mit  $\Sigma_x$  bezeichnet, schreiben:

$$(38) \quad \begin{aligned} \Sigma_x &= e^{-ikx} \cdot \sum_p \frac{e^{-ik_0 r_{0p}}}{r_{0p}} \\ &= e^{-ikx} \cdot B \cdot \sum_p \frac{e^{-ik_0 r_p}}{r_p}, \end{aligned}$$

da in jeder Parzelle, wie wir sahen,  $B$  Dipole liegen und  $kx$ , für alle in der Schicht liegenden Dipole bis auf Größen höherer Ordnung denselben Wert  $kx$  besitzt. Unter Benutzung von (38) folgt:

$$(39) \quad \begin{aligned} \Sigma_x &= \frac{B}{C} \cdot e^{-ikx} \cdot \sum_p e^{-ik_0 r_p} \cdot \Delta r_p \\ &= \frac{2\pi N \lambda_0}{A} \cdot e^{-ikx} \cdot \sum_p e^{-ik_0 r_p} \cdot \Delta r_p. \end{aligned}$$

Die rechtsstehende Summe über  $p$  kann man nach (34), (35) und (37) durch ein Integral ersetzen. Schreibt man noch  $\Delta x$  statt  $\lambda_0/A$ , so wird:

$$(40) \quad \sum_x = 2\pi \Re \Delta x \cdot e^{-ikx} \cdot \int_{r=x_0-x}^{\infty} e^{-ik_0 r} dr.$$

Führt man die Integration nach  $r$  aus, wobei man (vgl. Anhang I) den Beitrag der oberen Grenze fortläßt, setzt man schließlich  $dx$  statt  $\Delta x$  und integriert nach  $x$  von 0 bis  $D$ , so erhält man:

$$(41) \quad \sum = -\frac{2\pi \Re e^{-ik_0 x_0}}{k_0(k-k_0)} \cdot [1 - e^{-i(k-k_0)D}].$$

Nach (2) folgt hieraus:

$$(42) \quad B_- = k_0^2 \sum = \frac{2\pi \Re k_0 e^{-ik_0 x_0}}{k-k_0} \cdot [e^{-i(k-k_0)D} - 1]$$

in Übereinstimmung mit der Formel (174) des Textes. Ganz ebenso folgen  $B_+$ ,  $C_-$ ,  $C_+$  usw. aus (41) in Übereinstimmung mit den im Text gefundenen Werten.

(Eingegangen 26. Februar 1916.)

## 2. Über Paramagnetismus; von R. Gans.

Nachdem ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> einen einfachen Mechanismus angegeben habe, der auf Grund der statistischen Theorie die wesentlichen Erscheinungen des Para-, Dia- und Metamagnetismus erklärt, möchte ich jetzt etwas mehr ins Einzelne gehen, um zu zeigen, wie die sorgfältiger durchgearbeitete Theorie tatsächlich imstande ist, die Beobachtungen über die paramagnetische spezifische Suszeptibilität als Funktion der Temperatur quantitativ darzustellen.

Gleichzeitig wird der Vergleich unserer Formeln mit der Erfahrung uns wichtige molekulare Konstanten, die Stärke des molekularen Feldes, die Eigenschwingungszahlen der Elementarmagnete und ihre Trägheitsmomente zu berechnen gestatten.

In der oben erwähnten Abhandlung<sup>1)</sup> lag es mir daran, recht deutlich und klar die Unterschiede zwischen Para- und Diamagnetismus aus den Grundannahmen herauszuschälen, und deshalb habe ich absichtlich alle Komplikationen beiseite gelassen, trotzdem ich mir wohl bewußt war, daß damit ein quantitativer Anschluß an die Erfahrung nicht erreicht werden könne.

Die damals vorgenommene Vereinfachung bestand darin, daß jegliche Wechselwirkung der Elementarmagnete aufeinander vernachlässigt wurde.

Wohl aber wurde betont, daß reiner Paramagnetismus nicht existieren kann, sondern daß infolge der thermischen Agitation sich stets eine diamagnetische Erregung der paramagnetischen überlagert, welche sogar bei hohen Temperaturen überwiegen kann (Metamagnetismus).

In den weitaus meisten Fällen scheinen aber die konstanten paramagnetischen Momente so groß zu sein, daß bei allen praktisch erreichbaren Temperaturen der sich dem Para-

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 49. p. 140. 1916.

magnetismus superponierende Diamagnetismus unbedenklich vernachlässigt werden darf.

Deshalb soll in der jetzigen Arbeit nur der reine Paramagnetismus behandelt werden, jedoch ohne Vernachlässigung der Wechselwirkung der Magnetonen. Wir wollen eine Formel für die Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur und Dichte ableiten und diese an der Erfahrung prüfen.

Langevin<sup>1)</sup> gelangte, ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elementarmagnete, zu der Formel, daß

$$\chi T = \text{Const.}$$

sein muß. In Worten: Die spezifische (d. h. auf die Masseneinheit bezogene) Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional und von der Dichte unabhängig.

Obleich diese Beziehung in vielen Fällen gilt, wie schon die Messungen Wiedemanns und Curies zeigten, so ergaben sich doch aus den Versuchen von Kamerlingh Onnes<sup>2)</sup> und seiner Mitarbeiter sowie von Honda<sup>3)</sup> weitgehende Abweichungen vom Curie-Langevinschen Gesetze, die mich<sup>4)</sup> veranlaßten, die Wechselwirkung der Elementarmagnete mit in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Als Grundlage dienten mir dabei die theoretischen Studien, die ich mit Paul Hertz gemeinsam<sup>5)</sup> über das molekulare Feld und später allein<sup>6)</sup> über die thermische Agitation angestellt habe.

Da aber die Berechnung des molekularen Feldes, obwohl in den Grundzügen richtig, doch nicht ganz vollständig war, so soll jetzt noch einmal auf diesen Punkt eingegangen werden, zumal die Kenntnis desselben auch für die neuerdings von Debije<sup>7)</sup> gegebene dielektrische Theorie von Wichtigkeit ist, die voraussetzt, daß auch für die Erregung elektrisch polarisierbarer Substanzen die Orientierung bereits fertiger Dipole von Bedeutung ist.

1) P. Langevin, *Ann. Chim. Phys.* (8) **5**, p. 70. 1906.

2) Vgl. z. B. H. Kamerlingh Onnes u. A. Perrier, *Leiden Comm.* Nr. 122. 1911; H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, *l.c.* Nr. 132 e. 1913.

3) K. Honda, *Ann. d. Phys.* **32**, p. 1027. 1910.

4) R. Gans, *Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.* **16**, p. 780 u. 964. 1914.

5) R. Gans, *Gött. Nachr.* p. 197. 1910.

6) R. Gans, *Gött. Nachr.* p. 1. 1911.

7) P. Debije, *Physik. Zeitschr.* **18**, p. 97. 1912.

## § 1. Die Wechselwirkung der Elementarmagnete.

Um das magnetische Feld am Orte eines Magnetons zu bestimmen, denken wir uns dieses entfernt und beschreiben um den Punkt  $O$ , den der Mittelpunkt des Magnetons vorher einnahm, zwei Kugeln mit den Radien  $s$  und  $s'$ .<sup>1)</sup>  $s$  sei die kleinste mögliche Entfernung, die die Mittelpunkte zweier Elementarmagnete voneinander haben können;  $s'$  sei physikalisch unendlich klein, aber doch so groß, daß die Wirkung der außerhalb  $s'$  liegenden Magnetonen durch die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  angegeben werden kann.

Wie sich in der zitierten Arbeit ergab, ist die Feldstärke in  $O$ , soweit sie von dem äußeren Felde  $H$  und den Magnetonen außerhalb der Kugel mit dem Radius  $s'$  herrührt, gleich

$$(1) \quad K = H + \frac{4\pi}{3} M.$$

Um den Beitrag zur Feldstärke in  $O$  zu bestimmen, der von den Magnetonen erzeugt wird, die zwischen den Kugeln vom Radius  $s$  und  $s'$  liegen, müssen wir auf einen Satz eingehen, der die Wahrscheinlichkeit der Resultante von Vektoren zu bestimmen gestattet, wenn man die Wahrscheinlichkeit ihrer Komponenten kennt. Dieser Satz ist für die Ebene von Markoff<sup>2)</sup> bewiesen, läßt sich aber ohne Schwierigkeit für den Raum verallgemeinern, so daß ich von dem Beweise des Satzes absehen werde.

Er lautet folgendermaßen:

Es mögen  $m$  voneinander unabhängige Vektoren  $\mathfrak{h}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{h}^{(2)}$ , ...,  $\mathfrak{h}^{(m)}$  existieren, und es sei die Wahrscheinlichkeit, daß  $\mathfrak{h}^{(1)}$  Komponenten  $h_x^{(1)}$ ,  $h_y^{(1)}$ ,  $h_z^{(1)}$  hat, die zwischen den Werten  $h_x$  und  $h_x + dh_x$ ,  $h_y$  und  $h_y + dh_y$ ,  $h_z$  und  $h_z + dh_z$  liegen, gegeben durch  $w_1(h_x, h_y, h_z) \cdot dx dy dz$ . Entsprechende Bedeutung habe für den Vektor  $\mathfrak{h}^{(2)}$  die Funktion  $w_2(h_x, h_y, h_z)$  und schließlich für den Vektor  $\mathfrak{h}^{(m)}$  die Funktion  $w_m(h_x, h_y, h_z)$ .

Dann ist

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_i(h_x, h_y, h_z) dh_x dh_y dh_z = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

1) Vgl. R. Gans, Gött. Nachr. p. 233. 1910.

2) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig u. Berlin 1912, S. 173.

Gleichungen, die wir auch kurz

$$(2') \quad \int w_i d\sigma = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

schreiben können, wenn wir unter  $d\sigma = dh_x \cdot dh_y \cdot dh_z$  ein Volumelement des  $\mathfrak{h}$ -Raumes verstehen.

Wir bilden die Mittelwerte

$$(3) \quad \begin{cases} \int w_i h_x d\sigma = a_1^{(i)} \\ \int w_i h_y d\sigma = a_2^{(i)} \\ \int w_i h_z d\sigma = a_3^{(i)} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

und weiter

$$(4) \quad \begin{cases} \int w_i (h_x - a_1^{(i)})^2 d\sigma = a_{11}^{(i)}; & \int w_i (h_x - a_1^{(i)}) (h_y - a_2^{(i)}) d\sigma = a_{12}^{(i)} \\ \int w_i (h_y - a_2^{(i)})^2 d\sigma = a_{22}^{(i)}; & \int w_i (h_x - a_1^{(i)}) (h_z - a_3^{(i)}) d\sigma = a_{13}^{(i)} \\ \int w_i (h_z - a_3^{(i)})^2 d\sigma = a_{33}^{(i)}; & \int w_i (h_y - a_2^{(i)}) (h_z - a_3^{(i)}) d\sigma = a_{23}^{(i)} \end{cases}$$

und bezeichnen die respektiven Summen über  $i$  folgendermaßen:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_1^{(i)} = a_1; & \sum_{i=1}^m a_2^{(i)} = a_2; & \sum_{i=1}^m a_3^{(i)} = a_3 \\ \sum_{i=1}^m a_{11}^{(i)} = a_{11}; & \sum_{i=1}^m a_{22}^{(i)} = a_{22}; & \sum_{i=1}^m a_{33}^{(i)} = a_{33} \\ \sum_{i=1}^m a_{12}^{(i)} = a_{12}; & \sum_{i=1}^m a_{13}^{(i)} = a_{13}; & \sum_{i=1}^m a_{23}^{(i)} = a_{23} \end{cases}$$

und die Determinante

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

sowie die Unterdeterminante einer Größe  $a_{pq}$  durch  $\alpha_{pq}$ . Dann ist nach dem erwähnten Satze die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe  $\mathfrak{h}$  der  $m$  Vektoren  $\mathfrak{h}_i$

$$(7) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \dots + \mathfrak{h}_m$$

Komponenten hat, die zwischen den Werten  $X$  und  $X + dX$ ,  $Y$  und  $Y + dY$ ,  $Z$  und  $Z + dZ$  liegen, genähert gegeben durch

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & W \cdot dX \cdot dY \cdot dZ \\ & = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3} d} e^{\frac{-a_{11}(X-a_1)^2 + a_{22}(Y-a_2)^2 + a_{33}(Z-a_3)^2 + 2a_{12}(X-a_1)(Y-a_2) + \dots}{2d}} dXdYdZ. \end{aligned} \right.$$

Diesen Satz wenden wir auf unser Problem an. Wir nehmen an, daß sich zwischen den beiden Kugelflächen von den Radien  $s$  und  $s'$   $m$  Magnetonen befinden, jedes vom magnetischen Momente  $\mu$ . Das vom ersten Magneton herrührende Feld im Zentrum  $O$  der Kugeln sei  $h_1$ , das vom zweiten Magneton herrührende  $h_2$ , ... das vom  $m$ ten herrührende  $h_m$ .

Wir haben also die in (3) und (4) angedeuteten Mittelwerte zu bilden.  $w_i$  bedeutet die schwer zu berechnende Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Feldstärke. Da aber in (3) über sämtliche möglichen Feldstärken integriert wird, d. h. der Mittelwert aller möglichen Werte von  $h_x^{(i)}$  gebildet wird, so vertauscht man nur die Reihenfolge der Glieder der Summe, wenn man  $h_x^{(i)}$  mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, daß das Magneton in einem bestimmten Volumelement liegt und seine Achse zugleich eine bestimmte Richtung hat, und dann über das ganze zur Verfügung stehende Volumen und alle denkbaren Richtungen integriert. Durch diesen Kunstgriff gelingt es leicht, die Konstanten  $a$  in (3) und (4) zu berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Magneton 1 in einem bestimmten Volumelemente  $dS$  innerhalb der beiden Kugelflächen von den Radien  $s$  und  $s'$  liegt, ist gegeben durch

$$(9) \quad \frac{dS}{\frac{4\pi}{3}(s'^3 - s^3)}.$$

Bezeichnet ferner  $\varepsilon$  den Winkel, den die Achse des Magnetons mit der Richtung des äußeren Feldes  $\mathfrak{H}$  bildet,  $\varphi$  das Azimut der durch diese beiden Richtungen gelegten Ebene gegen eine feste durch die  $\mathfrak{H}$ -Achse gehende Ebene, und sei

$$(10) \quad f(\varepsilon, \varphi) d\varepsilon d\varphi$$

die Wahrscheinlichkeit<sup>1)</sup>, daß die Magnetonenachse zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon + d\varepsilon$ ,  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegt, so daß

1) In Wahrheit ist  $f$  aus Symmetriegründen von  $\varphi$  unabhängig.



$$(11) \quad \int_0^\pi d\varepsilon \int_0^{2\pi} f(\varepsilon, \psi) d\psi = 1$$

ist, so ist nach (8)

$$(12) \quad a_1^{(1)} = \frac{\int_0^\pi d\varepsilon \int_0^{2\pi} d\psi f(\varepsilon, \psi) h_z^{(1)}}{\frac{4\pi}{3} (s'^2 - s^2)}$$

Da alle  $m$  Magnetonen ganz gleichartig sind, so ist ferner

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots a_1^{(m)}.$$

Nach (4) ist

$$(13) \quad a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(2)} = \dots = a_{11}^{(m)} = \frac{\int_0^\pi d\varepsilon \int_0^{2\pi} d\psi f(\varepsilon, \psi) (h_z^{(1)} - a_1^{(1)})^2}{\frac{4\pi}{3} (s'^2 - s^2)}$$

usw.

Um die Quadraturen in (12) und (13) ausführen zu können, müssen wir das Feld  $h$  eines beliebig liegenden und beliebig orientierten Magnetons für den Punkt  $O$  berechnen.

Sei der betrachtete Punkt  $O$  der Ursprung eines Koordinatensystems  $x, y, z$ , und sei  $x', y', z'$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleichem Anfangspunkt, dessen  $z'$ -Achse aber der magnetischen Achse des betrachteten Elementarmagneten 1 parallel ist, so gelten folgende Formeln für die Komponenten der Feldstärke des Magnetons, dessen Zentrum im Punkte  $x, y, z$  liegt.

$$(14) \quad \begin{cases} h_x^{(1)} = \frac{3\mu}{r^3} (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) x - \frac{\mu \alpha_3}{r^3} \\ h_y^{(1)} = \frac{3\mu}{r^3} (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) y - \frac{\mu \beta_3}{r^3} \\ h_z^{(1)} = \frac{3\mu}{r^3} (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) z - \frac{\mu \gamma_3}{r^3}, \end{cases}$$

wo die  $\alpha, \beta, \gamma$  durch das Schema

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$y$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$z$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$

definiert sind.



Substituieren wir (14) in (12), so ergibt sich, wenn man beachtet, daß die Mittelwerte von  $x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx$  über eine Hohlkugel folgende Werte haben:

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{r^2}{3},$$

$$\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0,$$

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots = a_1^{(m)} = 0; \quad a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = \dots = a_2^{(m)} = 0;$$

$$a_3^{(1)} = a_3^{(2)} = a_3^{(m)} = 0,$$

also auch nach (5)

$$(15) \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

wodurch sich die Gleichungen (4) und die Formel (8) wesentlich vereinfachen.

Zur Berechnung von  $a_{pq}^{(i)}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) führen wir (14) und (15) in (13) ein und erhalten durch einfache Quadraturen

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= a_{22}^{(i)} = \frac{3}{5} \frac{\mu^2}{s^3 s'^3} \left[ 1 + \frac{\pi}{3} \int_0^\pi \sin^2 \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\ a_{33}^{(i)} &= \frac{3}{5} \frac{\mu^2}{s^3 s'^3} \left[ 1 + \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \cos^2 \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\ a_{12}^{(i)} &= a_{13}^{(i)} = a_{23}^{(i)} = 0, \end{aligned} \right.$$

also nach (5), da  $a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(2)} = \dots = a_{11}^{(m)}$  usw.,

$$a_{11} = m a_{11}^{(i)}.$$

Nun ist die Gesamtzahl

$$m = \frac{4\pi}{3} (s'^3 - s^3) n,$$

unter  $n$  die Anzahl Magnetonen pro Volumeinheit verstanden, und nimmt man  $s^3$  klein gegen  $s'^3$ , so wird schließlich

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \frac{4\pi}{5} \frac{\mu^2 n}{s^3} \left[ 1 + \frac{\pi}{3} \int_0^\pi \sin^2 \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\ a_{33} &= \frac{4\pi}{5} \frac{\mu^2 n}{s^3} \left[ 1 + \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \cos^2 \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\ a_{12} &= a_{13} = a_{23} = 0. \end{aligned} \right.$$

Aus (8) folgt somit

$$(18) \quad W dX dY dZ = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11}^2 a_{33}}} e^{-\left(\frac{X^2 + Y^2}{2a_{11}} + \frac{Z^2}{2a_{33}}\right)} dX dY dZ.$$

Die Größen  $a_{11}$  und  $a_{33}$  hängen von der Verteilungsfunktion  $f$  ab, d. h. von der Stärke des äußeren Feldes.

Um zu sehen, innerhalb welcher Grenzen die Koeffizienten variieren können, nehmen wir zuerst das äußere Feld gleich Null an. Dann sind alle Richtungen für die Achsen gleich wahrscheinlich, somit nach (10)

$$(19) \quad f(e) = \frac{\sin e}{4\pi},$$

und es wird

$$(20) \quad a_{11} = a_{33} = \frac{8\pi}{9} \frac{\mu^2 n}{s^3}.$$

Ist dagegen das Feld so stark, daß Sättigung eingetreten ist, d. h. daß alle Magnetonen den Winkel  $e = 0$  angenommen haben, so wird

$$(21) \quad \begin{cases} a_{11} = \frac{4\pi}{5} \frac{\mu^2 n}{s^3} \\ a_{33} = \frac{16\pi}{15} \frac{\mu^2 n}{s^3} \end{cases}.$$

Wir erkennen also, daß die Koeffizienten nur wenig variieren, wenn das Feld  $H$  von 0 bis  $\infty$  wächst.

Somit ist es absolut berechtigt, für paramagnetische Substanzen, bei denen (19) mit großer Annäherung gilt, für die Koeffizienten die Werte (20) anzunehmen und in Zukunft mit der aus (18) und (20) folgenden Formel

$$(22) \quad W dX dY dZ = \frac{1}{\left(\frac{16\pi^3 \mu^2 n}{9 s^3}\right)^{3/2}} e^{-\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\frac{16\pi}{9} \frac{\mu^2 n}{s^3}}} dX dY dZ$$

zu operieren.

Nennen wir das molekulare Feld  $A$ , setzen also

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = A^2,$$

und führen mittels (22) seinen wahrscheinlichsten Wert

$$(23) \quad A_0 = \sqrt{\frac{16\pi \mu^2 n}{9 s^3}}$$

ein, so geht  $W$  in die einfache Form

$$(24) \quad W = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 A_0^2}} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}}$$

über.

In (23) bedeutet  $n$  die Anzahl Elementarmagnete pro Volumeneinheit. Schreiben wir jedem Molekül einen Elementarmagneten zu, so ist  $n$  auch die Anzahl Moleküle pro Volumeneinheit, also

$$n = \frac{N_0 \varrho}{M},$$

unter  $\varrho$  die Dichte der Substanz, unter  $M$  ihr Molekulargewicht, unter  $N_0$  die Loschmidtsche Zahl verstanden.

So ergibt sich aus (23)

$$(25) \quad A_0 = \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{\pi N_0 \varrho}{M s^2}}.$$

Das häufigste Molekularfeld ist also dem Moment der Elementarmagnete und der Wurzel aus der Dichte direkt, der Wurzel aus dem Molekulargewicht und der Wurzel aus dem Kubus der kleinsten Entfernung zweier Elementarmagnete indirekt proportional.

## § 2. Die Suszeptibilität bei höheren Temperaturen.

In meinen früheren Arbeiten<sup>1)</sup> hatte ich aus Rücksicht auf die Einfachheit der mathematischen Rechnungen angenommen, daß das molekulare Feld  $A$  stets dieselbe Größe hat, daß aber jede Richtung für dasselbe gleich wahrscheinlich ist. Dieses Feld  $A$  setzte ich mit der erregenden Kraft

$$K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

[vgl. (1)] zusammen und berechnete die Verteilungsfunktion für die Achsen der Magnetonen in diesem resultierenden Kraftfelde nach den Gesetzen der Äquipartition.

In der jetzigen Behandlung wollen wir vorerst die Annahme der Äquipartition beibehalten. Das sollen die Worte „bei höheren Temperaturen“ in der Überschrift dieses Paragraphen bedeuten.

Ändern wollen wir nur die Voraussetzungen über die Wahrscheinlichkeit des molekularen Feldes, indem wir die strengere Formel (24) heranziehen.

1) R. Gans, Gött. Nachr. p. 197. 1910; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 16. p. 780. 964. 1914.

Früher hatten wir für die spezifische Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen gefunden

$$(26) \quad \chi = \frac{2 N \mu}{3 A} F\left(\frac{\mu A}{k T}\right).$$

Hier bedeutet  $N$  die Anzahl Elementarmagnete pro Masseneinheit,  $k$  die universelle Konstante  $1,346 \cdot 10^{-16}$ ,  $T$  die absolute Temperatur und

$$(27) \quad F(x) = L(x) + \frac{x}{2} L'(x),$$

worin  $L(x)$  die schon von Langevin eingeführte Funktion

$$(28) \quad L(x) = \text{Ctg } x - \frac{1}{x},$$

$L'$  ihr Differentialquotient nach  $x$  ist.

Jetzt haben wir den Ausdruck (26) einfach mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit jeden Vektors  $A$ , nämlich nach (24) mit

$$\frac{4 \pi A^2}{\sqrt{\pi^3 A_0^3}} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} dA$$

zu multiplizieren und von  $A = 0$  bis  $A = \infty$  zu integrieren. So erhalten wir die Gleichung

$$(29) \quad \chi = \frac{2 N \mu}{3} \frac{4 \pi}{(\sqrt{\pi} A_0)^3} \int_0^\infty F\left(\frac{\mu A}{k T}\right) e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} A dA,$$

die durch die Substitution  $z = A^2/A_0^2$  in

$$(30) \quad \chi = \frac{4 N \mu}{3 \sqrt{\pi} A_0} \int_0^\infty F\left(\frac{\mu A_0}{k T} \sqrt{z}\right) e^{-z} dz$$

übergeht.

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$(31) \quad \frac{k T}{\mu A_0} = \tau; \quad \frac{4 N \mu}{3 \sqrt{\pi} A_0} = \chi_0$$

nimmt (30) schließlich die Form an

$$(32) \quad \chi = \chi_0 \int_0^\infty F\left(\frac{\sqrt{z}}{\tau}\right) e^{-z} dz.$$

Diese Gleichung gibt eine Beziehung zwischen der spezifischen Suszeptibilität  $\chi$  und der absoluten Temperatur  $T$ , da  $\tau$  nach (31)  $T$  proportional ist.

In Wahrheit stellt (32) auch die Abhängigkeit von der Dichte dar, da nach (25) und (31)  $\chi_0$  und  $\tau$  der Wurzel aus der Dichte umgekehrt proportional sind. Bei der Diskussion der Suszeptibilität als Funktion der Temperatur dürfen wir jedoch, ohne große Fehler zu begehen, von den Dilatationen und Kontraktionen absehen, die feste und flüssige Körper durch Temperaturänderungen erfahren, und somit (32) als die Formel betrachten, welche die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Suszeptibilität paramagnetischer Körper zu berechnen gestattet.

Setzen wir noch

$$(33) \quad \frac{\mu A_0}{k} = \Theta,$$

so daß nach (31)

$$(34) \quad \tau = \frac{T}{\Theta}$$

wird, und führen die neue Funktion

$$(35) \quad \psi(\tau) = \int_0^{\infty} F\left(\frac{\sqrt{x}}{\tau}\right) e^{-x} dx$$

ein, so erhalten wir die zweikonstantige Formel

$$(36) \quad \frac{\chi}{\chi_0} = \psi\left(\frac{T}{\Theta}\right),$$

welche zeigt, daß innerhalb der Gültigkeitsgrenzen<sup>1)</sup> der Gleichung (36) die Suszeptibilität aller paramagnetischer Körper einem Gesetze korrespondierender Zustände gehorcht.

Bemerkung: Aus der Ableitung der Formel (26)<sup>2)</sup> erkennt man, daß genau genommen der Ausdruck der rechten Seite nicht

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{dS}{dH}$$

ist, unter  $S$  das Moment der Masseneinheit verstanden, sondern gleich

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{dS}{dK},$$

wo nach Gleichung (1)

$$K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

ist. Da  $M$  das magnetische Moment der Volumeinheit bedeutet,

1) D. h. innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der Äquipartitionstheorie

2) Vgl. R. Gans, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 16. p. 783. 1914.

so ist  $M = S \varrho$  ( $\varrho$  Dichte), also besteht die Beziehung

$$\frac{dS}{dH} = \frac{dS}{dK} \cdot \frac{dK}{dH} = \frac{dS}{dK} \left( 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{dM}{dH} \right) = \frac{dS}{dK} \left( 1 + \frac{4\pi \varrho}{3} \frac{dS}{dH} \right), \quad (41)$$

oder

$$\chi = \frac{dS}{dK} \left( 1 + \frac{4\pi \varrho}{3} \chi \right).$$

Auf der linken Seite von (26) und somit auch von (30) müßte also eigentlich anstatt  $\chi$  der Ausdruck

$$\frac{\chi}{1 + \frac{4\pi \varrho}{3} \chi}$$

stehen. Diese beiden Werte unterscheiden sich aber praktisch kaum, da  $\chi$  stets klein gegen die Einheit bleibt. Im übrigen ist es leicht, diese in einigen wenigen Fällen an die Meßgenauigkeit herankommende Korrektur anzubringen. (42)

### § 3. Berechnung der Funktion $\psi$ .

#### 1. Für kleine Werte von $\tau$ .

Nach (28) ist (43)

$$(37) \quad \begin{cases} L(x) = \\ = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} = (1 + e^{-2x})(1 + e^{-2x} + e^{-4x} + \dots) - \frac{1}{x} \\ = 1 - \frac{1}{x} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu x}, \end{cases} \quad (44)$$

also

$$(38) \quad L'(x) = \frac{1}{x^2} - 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu e^{-2\nu x}, \quad (45)$$

so daß nach (27)

$$(39) \quad F(x) = 1 - \frac{1}{2x} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \nu x) e^{-2\nu x} \quad (46)$$

und nach (35)

$$(40) \quad \begin{cases} \psi(\tau) = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\tau}{2\sqrt{z}} \right) e^{-z} dz \\ + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\nu \sqrt{z}}{\tau} \right) e^{-\frac{2\nu \sqrt{z}}{\tau}} e^{-z} dz \end{cases} \quad (47)$$

wird.

Durch die Substitution  $\sqrt{z} = v$  geht (40) über in

$$(41) \quad \psi(\tau) = 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\left(v^2 + \frac{2\nu}{\tau}v\right)} \left(1 - \frac{\nu}{\tau}v\right) v dv.$$

Führen wir die Bezeichnung

$$J_{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\left(v^2 + \frac{2\nu}{\tau}v\right)} dv = e^{\frac{\nu^2}{\tau^2}} \int_{\frac{\nu}{\tau}}^{\infty} e^{-w^2} dw$$

ein, so erhalten wir

$$(42) \quad \psi(\tau) = 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - 3 \frac{\nu}{\tau} J_{\nu} - \frac{\nu^2}{\tau^2} \left[2 \frac{\nu}{\tau} J_{\nu} - 1\right]\right).$$

Machen wir von der semikonvergenten Entwicklung<sup>1)</sup>

$$(43) \quad J_{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} \frac{(2\kappa)!}{\kappa! \left(2 \frac{\nu}{\tau}\right)^{2\kappa+1}}$$

Gebrauch, so ergibt sich

$$(44) \quad \psi(\tau) = 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa} (2\kappa)! (\kappa-1)}{\kappa! 2^{2\kappa-1}} S_{2\kappa} \cdot \tau^{2\kappa},$$

wo  $S_{2\kappa}$  den Zahlenwert

$$(45) \quad S_{2\kappa} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\kappa}} = \frac{1}{1^{2\kappa}} + \frac{1}{2^{2\kappa}} + \frac{1}{3^{2\kappa}} + \dots$$

bedeutet.

Die  $S_{2\kappa}$  lassen sich folgendermaßen durch die Bernoulli'schen Zahlen  $B_{\kappa}$  ausdrücken<sup>2)</sup>:

$$\frac{S_{2\kappa} (2\kappa)!}{2^{2\kappa-1}} = \pi^{2\kappa} B_{\kappa}.$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 5. Aufl. 1. p. 67. Braunschweig 1910.

2) Was wir  $B_{\kappa}$  nennen, wird von vielen Autoren, z. B. von Jahnke und Emde, in ihren Funktionstafeln sowie von Schlömilch, in seinem Compendium der höheren Analysis  $B_{2\kappa-1}$  genannt.

Durch diesen Ausdruck nimmt  $\psi$  die definitive Form an

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(\tau) &= 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^n - 1}{n!} B_n (\pi\tau)^{2n} \\ &= 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + \frac{B_2}{2!} (\pi\tau)^4 - \frac{2B_3}{3!} (\pi\tau)^6 + \frac{3B_4}{4!} (\pi\tau)^8 - \dots \end{aligned} \right.$$

Die ersten Bernoullischen Zahlen haben die numerischen Werte

$$B_1 = 1/6; B_2 = 1/30; B_3 = 1/42; B_4 = 1/30; B_5 = 5/66.$$

## 2. Für große Werte von $\tau$ .

Bedeutend die  $B$ , wie oben, die Bernoullischen Zahlen, so gilt die Entwicklung<sup>1)</sup> der Funktion  $L(x)$  [vgl. Formel (28)]

$$(47) \quad L(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} 2^{2v} \frac{B_v}{(2v)!} x^{2v-v};$$

also ist

$$(48) \quad L'(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} 2^{2v} \frac{B_v}{(2v)!} (2v-1) x^{2v-2},$$

und somit nach (27)

$$(49) \quad F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} 2^{2v-1} \frac{B_v}{(2v)!} (2v+1) x^{2v-1}.$$

Deshalb wird nach (35)

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(\tau) &= \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} 2^{2v} \frac{B_v}{(2v)!} (2v+1) \frac{1}{\tau^{2v-1}} \int_0^{\infty} v^{2v} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{2v+1}{v!} B_v \frac{1}{\tau^{2v-1}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \frac{3}{1!} \frac{B_1}{\tau} - \frac{5}{2!} \frac{B_2}{\tau^3} + \frac{7}{3!} \frac{B_3}{\tau^5} - \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für extrem hohe Temperaturen kann man sich auf das erste Glied der Reihe (50) beschränken und erhält nach (36) und (31)

1) O. Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis. 1. p. 277. Braunschweig 1868.



$$(51) \quad \chi T = \frac{N \mu^2}{3 k},$$

d. h. das Curie-Langevinsche Gesetz.

Die folgende Tabelle gibt  $\psi = \chi/\chi_0$  als Funktion von  $\tau = T/\Theta$ , gemäß den Gleichungen (46) und (50) und

$$\psi \tau = \frac{\chi T}{\chi_0 \Theta}.$$

$\tau$	$\psi$	$\psi \tau$	$\tau$	$\psi$	$\psi \tau$
0,0	1,0000	0,0000	3,3333	0,1310	0,4367
0,1	0,9115	0,09115	4,0	0,1097	0,4388
0,2	0,8249	0,1650	5,0	0,08806	0,4403
0,25	0,7825	0,1956	8,0	0,05526	0,4421
0,5	0,6013	0,3006	10	0,04425	0,4425
1,0	0,3867	0,3867	15	0,02953	0,4429
1,25	0,3231	0,4039	20	0,02215	0,4430
1,4286	0,2883	0,4119	25	0,01773	0,4431
1,6667	0,2516	0,4198	30	0,01477	0,4431
2,0	0,2131	0,4262	$\infty$	0,00000	0,4431
2,5	0,1727	0,4317			
3,0	0,1451	0,4353			

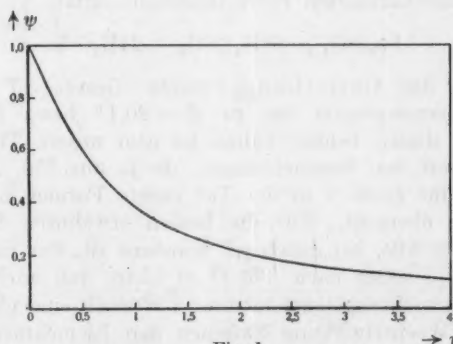


Fig. 1.

Fig. 1 stellt  $\psi$  als Funktion von  $\tau$  dar. Fig. 2 gibt  $\psi \tau$  als Funktion von  $\tau$ . Diese Funktion sollte nach Langevin konstant sein (vgl. in der Figur die Gerade), während sie nach unserer Theorie nur für sehr hohe Temperaturen sich der Langevinschen Geraden nähert.

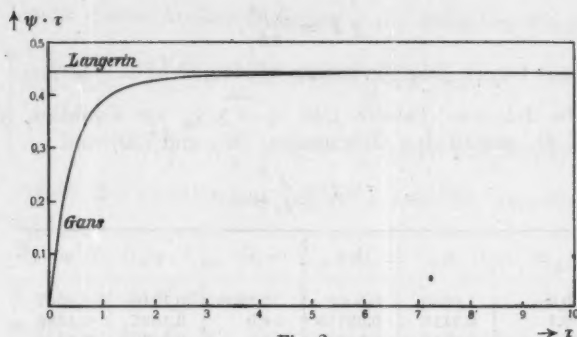
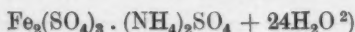


Fig. 2.

#### § 4. Prüfung der Theorie an der Erfahrung.

Zum Vergleich der Erfahrung mit der Theorie ziehen wir die Messungen von Kamerlingh Onnes und seiner Mitarbeiter Oosterhuis und Perrier, sowie Beobachtungen von Honda heran.

Beim kristallisierten Gadoliniumsulfat  $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}^{1)}$  und beim kristallisierten Ferri-Ammoniumsulfat



z. B. gilt das Curie-Langevinsche Gesetz  $\chi T = \text{Const.}$  von Zimmertemperatur bis zu  $T = 20,1^\circ$  bzw.  $T = 14,7^\circ$  herab. In diesen beiden Fällen ist also unsere Theorie im Einklang mit den Beobachtungen, da ja aus Fig. 2 hervorgeht, daß für große  $\tau$  in der Tat unsere Formel in die von Langevin übergeht. Für die beiden erwähnten Stoffe ist also, wie für alle, bei denen  $\chi T$  konstant ist, das molekulare Feld  $A_0$  und somit nach (33)  $\Theta$  so klein, daß auch für die tiefsten Beobachtungstemperaturen  $T/\Theta$  noch eine große Zahl ist. Eine Wechselwirkung zwischen den Elementarmagneten ist hier noch nicht festzustellen.

1) H. Kamerlingh Onnes u. A. Perrier, Leiden Comm. Nr. 122. p. 5. 1911; H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, l. c. Nr. 129. p. 25. 1912.

2) H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, l. c. Nr. 139. p. 59. 1914.

Für kristallisiertes Ferrosulfat  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}^1)$  gelten folgende Daten

$T$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi T \cdot 10^6$
292,3	42,4	12390
77,3	160	12370
64,6	191	12340
20,3	571	11590
14,7	756	11110

Unter Annahme der Konstanten  $\chi_0$  und  $\Theta$  zu

$$\chi_0 = 2212 \cdot 10^{-6}; \Theta = 12,64$$

ist die Kurve Fig. 3 nach unserer Theorie konstruiert, und die Beobachtungen sind als Kreuze eingetragen worden.

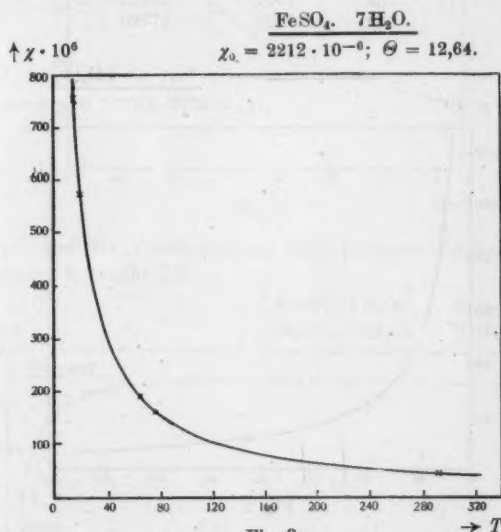


Fig. 3.

Wir sehen, daß die Übereinstimmung völlig befriedigend ist, während nach der Langevinschen Theorie, wie die Kolonne der Werte  $\chi T$  zeigt, bereits erheblichere Abweichungen auftreten.

1) H. Kamerling Onnes u. E. Oosterhuis, l. c. Nr. 139. p. 57. 1914.

Ähnlich liegen die Verhältnisse beim kristallisierten Manganosulfat  $\text{MnSO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ <sup>1)</sup>, bei dem mittels

$$\chi_0 = 4387 \cdot 10^{-6}; \Theta = 9,900,$$

wie Fig. 4 zeigt, der Anschluß an die Erfahrung bewerkstelligt werden konnte. Die Meßergebnisse sind die folgenden:

$T$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi T \cdot 10^6$
288,7	66,3	19140
169,6	111,5	18910
77,4	247	19120
70,5	270	19030
64,9	292	18950
20,1	914	18370
17,8	1021	18170
14,4	1233	17760

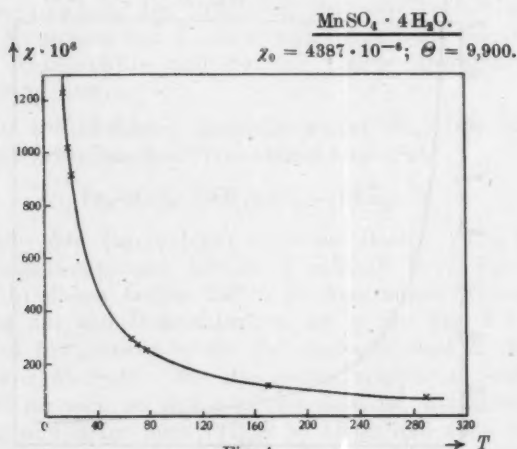


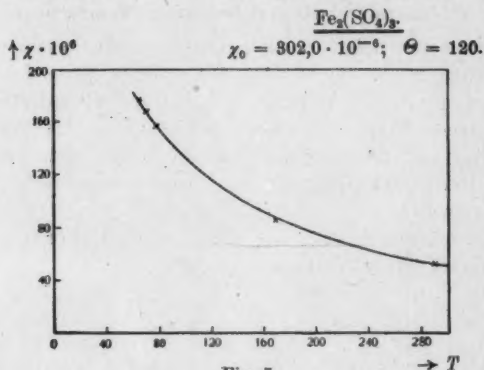
Fig. 4.

Sodann wurden die Messungen am wasserfreien Ferri-sulfat  $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ <sup>2)</sup> mit der Theorie verglichen

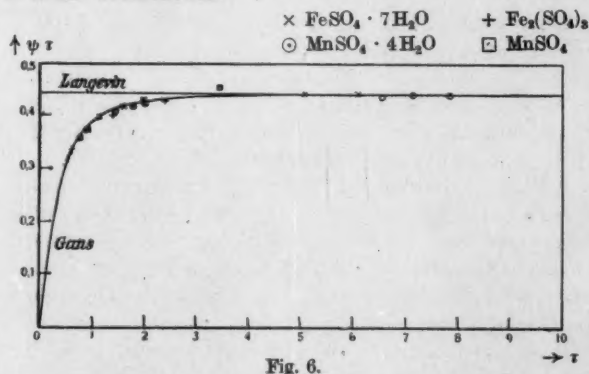
- 1) H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, l. c. Nr. 132. p. 45. 1913.
- 2) H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, l. c. Nr. 129. p. 24. 1912.

$T$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi T \cdot 10^6$
289,8	53,3	15450
169,6	85,6	14520
77,4	157,2	12170
70,5	167,3	11800
64,0	177,1	11490

Mit  $\chi_0 = 302,0 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Theta = 120$  ergab sich Fig. 5.



Hier sind die Abweichungen vom Langevinschen Gesetz schon recht beträchtlich.



Am deutlichsten erkennt man wohl den Unterschied zwischen der Langevinschen Theorie und der hier entwickelten,

wenn man, wie in Fig. 2,  $\psi\tau$  als Funktion von  $\tau$  zeichnet (vgl. Fig. 6) und die bei den erwähnten Stoffen sowie bei dem noch später zu behandelnden wasserfreien Mangansulfat beobachteten Werte einträgt.

Es ist wohl überzeugend, daß die Formel  $\chi T = \text{Const.}$  bei tieferen Temperaturen versagt, und daß meine Gleichung für  $\chi$  die Erscheinungen hinreichend gut beschreibt.

#### § 5. Die Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen.

So zufriedenstellend die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung bei den oben herangezogenen Beispielen auch ist, so genügt doch ein Blick auf die von Honda<sup>1)</sup> gezeichneten Kurven, um einzusehen, daß der von uns berechnete Verlauf der spezifischen Suszeptibilität paramagnetischer Körper als Temperaturfunktion (vgl. Fig. 1) bei tiefen Temperaturen unrichtig ist.

Während unsere bisherige Theorie nach Formel (46) für kleine Werte von  $T$  verlangt, daß

$$\chi = \chi_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{T}{\Theta} \right)$$

ist, zeigen die Beobachtungen, etwa an Uran, Magnesium, Aluminium, Molybdän, Niobium, Tantal, Wolfram, daß die  $\chi$ -Kurve bei tiefen Temperaturen, praktisch häufig schon bei Zimmertemperatur, bei Molybdän und Wolfram sogar schon bei den höchsten Temperaturen von 1200° bzw. 1100° C die Tendenz hat, der  $T$ -Achse parallel zu werden.

Der Grund dieser Unstimmigkeit liegt offenbar darin, daß die Voraussetzung unserer Theorie, Gültigkeit des Äquipartitionsprinzips, bei tiefen Temperaturen versagt. Hier hat also die Quantentheorie einzugreifen.

Ein Elementarmagnet, der sich um seinen Schwerpunkt beliebig drehen kann, ist bezüglich dieser Rotationen ein System von zwei Freiheitsgraden. Für solche existiert aber noch keine Quantentheorie. Allgemein werden wir somit nicht in der Lage sein, eine Formel für  $\psi$  nach der Quantentheorie zu entwickeln.

Wohl aber gelingt dies bei sehr tiefen Temperaturen, bei denen die thermische Agitation den Magneten um seine

1) K. Honda, Ann. d. Phys. **32**, p. 1056. 1910.

Gleichgewichtslage, d. h. die Richtung des molekularen Feldes  $A$ , schwingen lassen wird, und zwar mit einer Schwingungszahl  $\nu$ , die sich durch die Formel  $\nu^2 = \mu A / 4\pi^2 J$  berechnet, unter  $J$  das Trägheitsmoment des Teilchens bezüglich einer Achse verstanden, die senkrecht zur magnetischen Achse durch den Schwerpunkt geht.<sup>1)</sup>

Der Behandlung dieses zweidimensionalen Oszillators mittels der Quantentheorie stehen zwar die gewichtigen Bedenken entgegen, die Poincaré<sup>2)</sup> in einer Diskussion auf dem Solvay-Kongreß 1911 geäußert hat. Doch wollen wir uns über dieselben genau so hinwegsetzen, wie es alle anderen Physiker getan haben, indem wir die Energieverteilung so annehmen, als ob jeder Freiheitsgrad ein linearer Oszillator wäre.<sup>3)</sup>

Nach dieser Präzisierung der Grundlagen können wir an die Aufstellung der in Frage kommenden Formeln gehen.

Ein Elementarmagnet vom Trägheitsmomente  $J$  und dem magnetischen Momente  $\mu$  führe in einem Felde  $h$  um seine Gleichgewichtslage unendlich kleine Schwingungen aus.

Bezeichnen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Winkelablenkungen in zwei aufeinander senkrechten Richtungen, und setzen wir  $D = \mu h$ , so ist die Energie des Systems

$$(52) \quad \varepsilon = \frac{J}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{D}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Sind die Maximalamplituden, die den beiden Koordinaten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  entsprechen,  $C_1$  und  $C_2$ , so ist diese Energie auch

$$(53) \quad \varepsilon = \frac{D}{2} (C_1^2 + C_2^2).$$

Bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel, den die Magnetonenachse in einem bestimmten Momente mit der Feldrichtung bildet, so ist

$$(54) \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} = 1 - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2}.$$

1) Schon F. Hasenöhl, Physik. Zeitschr. 12. p. 931. 1911, wies ausdrücklich darauf hin, daß jeder Körper bei genügend tiefen Temperaturen als System von einfachen Oszillatoren aufgefaßt werden kann.

2) Verhandl. d. Solvay-Kongresses 1911; deutsch von A. Eucken, Halle 1914. p. 99.

3) Vgl. z. B. P. Debye, Math. Vorlesungen an d. Univ. Göttingen. VI. Leipzig u. Berlin 1914. p. 32.

Der zeitliche Mittelwert dieser Größe ist

$$(55) \quad \overline{\cos \vartheta} = 1 - \frac{\overline{\vartheta^2}}{2} = 1 - \frac{C_1^2 + C_2^2}{4}$$

und somit wegen (53)

$$(56) \quad \overline{\cos \vartheta} = 1 - \frac{\bar{\epsilon}}{2D}.$$

Bilden wir von dieser Größe, die sich auf ein bestimmtes Magneton bezieht, den Mittelwert über alle  $N$  in der Masseneinheit befindlichen Magnetonen, so wird derselbe

$$(57) \quad \overline{\overline{\cos \vartheta}} = 1 - \frac{\bar{\epsilon}}{2D},$$

unter  $\bar{\epsilon}$  die mittlere Energie eines Oszillators von zwei Freiheitsgraden verstanden.

Nun lehrt aber die Quantentheorie, daß diese den Wert

$$(58) \quad \bar{\epsilon} = \frac{2\nu h}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1}$$

hat, wenn wir die ursprüngliche Plancksche Theorie ohne Nullpunktsenergie unseren Betrachtungen zugrunde legen, so daß schließlich

$$(59) \quad \overline{\overline{\cos \vartheta}} = 1 - \frac{\nu h}{\mu \hbar} \frac{1}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1}$$

wird.

Diese Formel ist ganz entsprechend der Langevinschen Funktion

$$L\left(\frac{\mu \hbar}{kT}\right),$$

die für niedrige Temperaturen [vgl. (28)] in

$$L\left(\frac{\mu \hbar}{kT}\right) = 1 - \frac{kT}{\mu \hbar}$$

übergeht.<sup>1)</sup>

Deshalb wollen wir auch in (59) den Mittelwert über  $\cos \vartheta$  in ähnlicher Weise durch  $L(\hbar)$  bezeichnen und erhalten

$$(59') \quad L(\hbar) = 1 - \frac{1}{\mu \hbar} \cdot \frac{\nu h}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1}.$$

1) Als niedrig ist hier eine Temperatur anzusehen, die klein gegen  $\mu \hbar/k$  ist, weil die Oszillatoren unter dieser Bedingung kleine Amplituden haben.



Diese Formel gilt für niedrige Temperaturen. Ist  $T$  zwar klein, aber groß gegen  $\nu h/k$ , so geht (59') in

$$1 - \frac{kT}{\mu h}$$

über<sup>1)</sup>, d. h. in den für niedrige Temperaturen nach der Äquipartitionstheorie geltenden Wert.

Um nun zunächst ein der Größe nach konstantes molekulares Feld  $A$  zu berücksichtigen, haben wir das Integral

$$(60) \quad \frac{S}{S_{\infty}} = \int_{A-K}^{A+K} L(z) \frac{z^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} dz$$

genau wie in der Äquipartitionstheorie<sup>2)</sup> zu bilden, in dem  $S$  die spezifische Magnetisierung bedeutet,  $S_{\infty} = N\mu$  ist, und für  $L$  jetzt die Funktion (59') eingesetzt werden muß.

Es würde dann  $\chi$  als

$$(61) \quad \chi = \lim_{K=0} \frac{dS}{dK}$$

zu berechnen sein.

Bei der Ausführung der Quadratur ist aber zu beachten, daß  $\nu$  in (59') vom Felde  $h$  abhängt, so daß wir die Größe

$$(62) \quad U = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT} - 1}$$

für ein Feld  $h = z$  in der Form

$$U = U_0 + \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_0 \frac{\partial \nu}{\partial A} (z - A) + \dots$$

entwickeln können.

Hier bedeuten  $U_0$  und  $(\partial U / \partial \nu)_0$  die Werte von  $U$  und  $\partial U / \partial \nu$ , welche sich ergeben, wenn man in der allgemeinen Formel

1) Geht man in der Entwicklung von  $e^{\nu h/kT}$  um ein Glied weiter, so erhält man

$$L = 1 - \frac{kT - \frac{h\nu}{2}}{\mu h}$$

entsprechend der Tatsache, daß die Energie nach der ersten Quantentheorie stets um den Betrag  $h\nu/2$  hinter dem klassischen Wert  $kT$  zurückbleibt.

2) Vgl. R. Gans, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 16. p. 783. 1914.

Annalen der Physik. IV. Folge. 50.

$$\nu^2 = \frac{\mu \hbar}{4\pi^2 J}$$

$\hbar$  durch  $A$  ersetzt und also

$$\nu^2 = \frac{\mu A}{4\pi^2 J}$$

in  $U$  und  $\partial U/\partial \nu$  einführt; ähnlich ist  $\partial \nu/\partial A$  zur Abkürzung für  $(\partial \nu/\partial \hbar)_{\hbar=A}$  geschrieben.

So ergibt sich durch Ausführung der in (60) angedeuteten Integration sowie der in (61) geforderten Operationen

$$(63) \quad \chi = \frac{2}{3} \frac{N\mu}{A} \left[ 1 - \frac{U + \frac{\nu}{2} \frac{dU}{d\nu}}{2\mu A} \right],$$

und es ist

$$(64) \quad F = 1 - \frac{U + \frac{\nu}{2} \frac{dU}{d\nu}}{2\mu A}$$

die Funktion, die der ebenso bezeichneten Funktion in der Äquipartitionstheorie entspricht, welche letztere für kleine Werte von  $T$  nach (26) und (27) in

$$1 - \frac{kT}{2\mu A}$$

übergeht.

Mit wachsendem  $T$  nähert sich (64) diesem Wert in der Tat.

Um schließlich  $\chi$  zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß  $A$  nicht konstant ist, haben wir (63), wie früher in Gleichung (29) mit

$$\frac{4\pi A^2}{\sqrt{\pi^2 A_0^2}} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} dA$$

zu multiplizieren und über  $A$  zu integrieren und erhalten

$$(65) \quad \psi = \frac{\chi}{\chi_0} = 1 - \frac{1}{\mu A_0} \int_0^\infty \left( U + \frac{\nu}{2} \frac{dU}{d\nu} \right) e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \frac{dA}{A_0}.$$

#### § 6. Berechnung der Funktion $\psi$ .

Setzen wir

$$(66) \quad \xi = \frac{h\nu}{kT},$$

so wird nach (62)

$$(67) \quad U = kT \frac{\xi}{e^\xi - 1}.$$

also

$$U + \frac{\nu}{2} \frac{\partial U}{\partial \nu} = U + \frac{\xi}{2} \frac{\partial U}{\partial \xi} = kT \left[ \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} + \frac{1}{2} \xi \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} \right) \right].$$

So wird nach (65), wenn wir die dem wahrscheinlichsten Felde  $A_0$  entsprechende Schwingungszahl  $\nu$  durch die Gleichung

$$(68) \quad \nu_0^3 = \frac{\mu A_0}{4\pi^2 J}$$

eingeführen, zur Abkürzung

$$(69) \quad \zeta = \frac{kT}{\nu_0 h},$$

setzen und schließlich  $A$  durch die Beziehung

$$\frac{A}{A_0} = \frac{4\pi^2 J \nu^3}{\mu A_0} = \frac{\nu^3}{\nu_0^3} = \xi^3 \zeta^2$$

[vgl. (66) und (69)] eliminieren,

$$\frac{x_0 - x}{x_0} = \frac{kT}{\mu A_0} \zeta^2 \int_0^\infty \left[ \frac{2\xi^2}{e^{\xi} - 1} + \xi^2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} \right) \right] e^{-\xi^2 \zeta^2} d\xi.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch partielle Integration des zweiten Summanden im Integral umformen, und man erhält schließlich

$$(70) \quad \frac{x_0 - x}{x_0} = \frac{4kT}{\mu A_0} \zeta^3 \int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} e^{-\xi^2 \zeta^2} d\xi.$$

Setzen wir, wie früher,

$$\frac{\mu A_0}{k} = \Theta$$

und außerdem

$$(71) \quad \frac{\nu_0 h}{k} = \vartheta, \quad \text{also } \zeta = \frac{T}{\vartheta},$$

so schreibt sich

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0 - x}{x_0} = \frac{4\vartheta}{\Theta} \frac{T}{\vartheta} W\left(\frac{T}{\vartheta}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\vartheta}{\Theta} U(\zeta) \\ \text{oder} \\ x = x_0 \left[ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\vartheta}{\Theta} U(\zeta) \right], \end{array} \right.$$

unter  $W(\zeta)$  bzw.  $U(\zeta)$  die Funktionen

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(\zeta) = \zeta^3 \int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} e^{-\xi^2 \zeta^2} d\xi \\ U(\zeta) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \zeta W(\zeta) \end{array} \right.$$

verstanden.

Die Formeln (72) beanspruchen Gültigkeit, solange  $T$  klein gegen  $\Theta$  ist. Dabei darf  $T/\Theta$  jeden beliebigen Wert annehmen.

1. Für extrem niedrige Temperaturen, d. h. für sehr kleine Werte von  $\zeta$ , ist nach (73)

$$W(\zeta) = \zeta^6 \int_0^\infty (e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \dots) e^{-\zeta^4 \xi^4} d\xi,$$

und wenn man  $e^{-\zeta^4 \xi^4}$  nach Potenzen von  $\zeta$  entwickelt.

$$(74) \quad W(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta^{4n+6}}{n!} \int_0^\infty \xi^{4n+6} (e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \dots) d\xi,$$

und dieser Ausdruck geht mittels der Definitionsformel der  $T$ -Funktion in

$$(75) \quad W(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+6)!}{n!} S_{4n+7} \zeta^{4n+6}$$

über, unter  $S_{4n+7}$  die Reihe

$$S_{4n+7} = \frac{1}{1^{4n+7}} + \frac{1}{2^{4n+7}} + \frac{1}{3^{4n+7}} + \dots$$

verstanden.

Es ist

$$S_7 = 1,0083; S_{11} = 1,0005; S_{15} = S_{19} = S_{23} = \dots = 1,0000.$$

Die Reihe (75) ist nur für äußerst kleine Werte von

$$\zeta = \frac{T}{\Theta}$$

brauchbar. Sie zeigt im Verein mit (72), daß in der Nähe des absoluten Nullpunktes die spezifische Suszeptibilität sich wie die 7. Potenz der absoluten Temperatur verändert.

2. Für höhere Temperaturen substituieren wir

$$(76) \quad \xi \zeta = \alpha,$$

so daß  $W$  in

$$(77) \quad W(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \int_0^\infty \frac{\alpha^6}{e^{\alpha/\zeta} - 1} e^{-\alpha^4} d\alpha$$

übergeht.

Bedeutet  $B_n$  die  $n$ te Bernoullische Zahl, so gilt<sup>1)</sup>

$$\frac{\alpha/\zeta}{e^{\alpha/\zeta} - 1} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \left(\frac{\alpha}{\zeta}\right)^{2n},$$

und mittels dieser Beziehung und einfacher Formeln aus der Theorie der  $T$ -Funktionen geht  $W$  über in

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} W(\zeta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} - \frac{\pi}{8\zeta} + \frac{1}{4} \left[ \frac{B_1}{2!} \frac{1!}{\zeta^2} + \frac{B_3}{6!} \frac{2!}{\zeta^6} + \frac{B_5}{10!} \frac{3!}{\zeta^{10}} + \frac{B_7}{14!} \frac{4!}{\zeta^{14}} + \dots \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[ \frac{B_2}{4!} \frac{1}{\zeta^4} + \frac{B_4}{8!} \frac{3}{\zeta^8} + \frac{B_6}{12!} \frac{5}{\zeta^{12}} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Ist  $T$  klein gegen  $\Theta$ , aber groß gegen  $\vartheta$ , so daß  $W$  in  $\sqrt{\pi}/8$  übergeht, so wird nach (72)

$$\chi = \chi_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{T}{\Theta} \right),$$

wie es Gleichung (46) verlangt. Unter diesen Bedingungen geht also, wie zu erwarten, die Quantentheorie in die Äquipartitionstheorie über.

Es berechnet sich folgende Tabelle:

$\frac{T}{\vartheta} = \zeta$	$\frac{8}{\sqrt{\pi}} W$	$U = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \zeta \cdot W$
0,0	0,0000	0,0000
0,5	0,3095	0,1547
0,7	0,4429	0,3100
1	0,5734	0,5734
2	0,7641	1,528
3	0,8376	2,513
4	0,8762	3,505
5	0,9000	4,500
10	0,9491	9,491
20	0,9743	19,49
$\infty$	1,0000	$\infty$

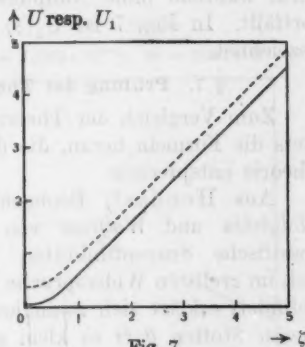


Fig. 7.

Die graphische Darstellung von

$$U = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \zeta W$$

als Funktion von  $\zeta$  (Fig. 7) gibt in ausgezogener Linie

$$\frac{(\chi_0 - \chi)^2 \Theta}{\chi_0 \sqrt{\pi} \vartheta}$$

als Funktion von  $T/\vartheta$ .

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 39. p. 799. 1912.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch, wie die Formeln gemäß der zweiten Planckschen Quantentheorie mit Nullpunktsenergie lauten würden. Wir wählen für alle Größen dieselben Buchstaben, geben ihnen aber zum Unterschied den Index 1.

Anstatt (58) haben wir zu setzen

$$(58_1) \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon} + \nu h.$$

Dadurch geht  $L$  [vgl. (59')] über in

$$(59_1') \quad L_1 = L - \frac{\nu h}{2\mu h}$$

und  $F$  in [vgl. (64)]

$$(64_1) \quad F_1 = F - \frac{\nu h}{4\mu A},$$

so daß schließlich

$$(65_1) \quad \psi_1 = \psi - 0,3064 \frac{\vartheta}{\Theta}$$

und

$$(72_1) \quad \chi = \chi_0 \left[ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\vartheta}{\Theta} (U(\zeta) + 0,3457) \right]$$

wird, während ohne Nullpunktsenergie der Summand 0,3457 fortfällt. In Fig. 7 ist  $U_1(\xi) = U(\xi) + 0,3457$  punktiert eingezeichnet.

#### § 7. Prüfung der Theorie an der Erfahrung.

Zum Vergleich der Theorie mit der Erfahrung ziehen wir stets die Formeln heran, die der ursprünglichen Planckschen Theorie entsprechen.

Aus Hondas<sup>1)</sup> Beobachtungen ergibt sich z. B., daß *Molybdän* und *Wolfram* von der Temperatur unabhängige spezifische Suszeptibilitäten besitzen. Diese Tatsache, die sich im grellsten Widerspruche mit der Langevinschen Theorie befindet, erklärt sich zwanglos aus unserer Theorie, wenn bei diesen Stoffen  $\vartheta/\Theta$  so klein gegen die Einheit ist, daß auch bei den höchsten beobachteten Temperaturen

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\vartheta}{\Theta} U(\zeta)$$

noch klein gegen 1 bleibt.

Im Falle von *Platin* ziehen wir für tiefe Temperaturen Messungen von Kamerlingh Onnes und Oosterhuis<sup>2)</sup>, für

1) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. p. 1056. 1910.

2) H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, Leiden Comm. Nr. 132. p. 48. 1913.

höhere Temperaturen Beobachtungen von Honda<sup>1)</sup> heran, und zwar wählen wir aus letzteren Beobachtungen diejenigen heraus, die sich auf Material gleicher Provenienz (Heraüs in Hanau) beziehen. Der Wert für Zimmertemperatur ist bei Honda etwas größer als bei Kamerlingh Onnes und Oosterhuis. Deshalb reduzieren wir die Werte Hondas in ihrem absoluten Werte auf die der holländischen Forscher durch Multiplikation aller Beobachtungszahlen mit demselben Faktor.

So erhalten wir folgende Tabelle:

$T$	$\chi \cdot 10^6$	Beobachter
973	0,660	Honda
673	0,784	"
473	0,880	"
373	0,933	"
290,2	0,973	K. O. u. O.
77,4	1,061	"
20,1	1,080	"
14,4	1,087	"

Platin.

$\uparrow \chi \cdot 10^6$

$\chi_0 = 1,089 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Theta = 2097$ ;  $\vartheta = 50,0$ .

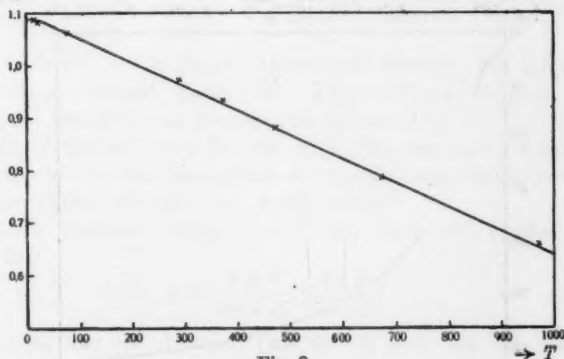


Fig. 8.

Fig. 8 gibt die mit den Konstanten  $\chi_0 = 1,089 \cdot 10^{-6}$ ;  $\Theta = 2097$ ;  $\vartheta = 50,0$  berechnete theoretische Kurve mit den eingezeichneten Beobachtungen.

1) K. Honda, l. c.

Für das wasserfreie Mangansulfat  $\text{MnSO}_4$  liegen folgende Beobachtungen von Kamerlingh Onnes und Oosterhuis<sup>1)</sup> vor:

$T$	$\chi \cdot 10^6$	$\chi T \cdot 10^6$
293,9	87,8	25800
169,6	144,2	24460
77,4	274,8	21270
64,9	314,5	20410
20,1	603	
17,8	627	
14,4	686	

Bis zu  $T = 64,9^\circ$  abwärts kann man die für höhere Temperaturen geltende Formel nach der Äquipartitionstheorie, von  $20,1^\circ$  an bis zum absoluten Nullpunkt die nach der Quantentheorie berechnete Formel gebrauchen und erhält mit

$$\chi_0 = 670 \cdot 10^{-6}; \Theta = 84,94^\circ; \vartheta = 23,5^\circ$$

die in Fig. 9 gezeichnete theoretische Kurve, die mit den Beobachtungen recht gut übereinstimmt.

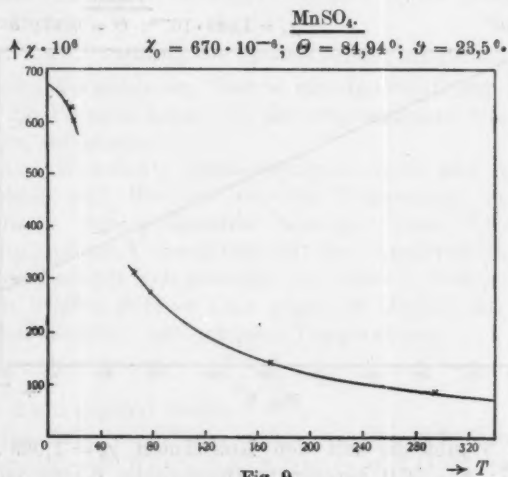


Fig. 9.

1) H. Kamerlingh Onnes u. E. Oosterhuis, Leiden Comm. Nr. 132. p. 46. 1913.



## § 8. Der Magnetismus von Sauerstoff-Stickstoff-Gemischen.

Bisher durften wir die Dichte genähert als Konstante betrachten, da ihre Änderung infolge der thermischen Dilatation bei festen Körpern nur gering ist.

Wollen wir aber die interessanten Messungen mit heranziehen, die Kamerlingh Onnes und Perrier<sup>1)</sup> angestellt haben, indem sie paramagnetischen Sauerstoff mit magnetisch fast indifferentem Stickstoff mischten, so müssen wir sowohl die partielle Dichte  $\varrho$  des Sauerstoffs als auch die Temperatur  $T$  als variabel betrachten.

Die Beobachtungen sind die folgenden:

$T$	$\varrho$	$\chi \cdot 10^6$	$T$	$\varrho$	$\chi \cdot 10^6$
77,45	1,204	259,6	70,87	0,7458	314,5
70,87	1,235	271,4	70,87	0,4010	359,6
64,26	1,267	284,9	70,87	0,2304	393,0
			70,87	0,1380	420,4
77,45	0,7458	294,5			
77,31	0,4010	336,7	64,26	0,7458	336,5
77,50	0,2304	363,8	64,26	0,4010	390,6
77,45	0,1380	383,6	64,26	0,2304	423,5
77,30	0,0801	395,8	64,26	0,1380	459,8
			64,26	0,0801	472,0
			293,1	0,001331	105,6

Die letzte in der Tabelle aufgeführte Messung bei Zimmertemperatur stammt nicht von Kamerlingh Onnes und Perrier, sondern von Weiss und Piccard.<sup>2)</sup>

Ein Blick auf diese Tabelle zeigt, daß die Langevinsche Theorie, welche Unabhängigkeit der spezifischen Suszeptibilität von der Dichte fordert, hier völlig versagt.

Nach unseren Formeln (36), (31) und (33) ergibt sich nun, daß

$$(79) \quad \chi = \frac{4 N \mu}{3 \sqrt{\pi} A_0} \psi \left( \frac{k T}{\mu A_0} \right)$$

sein muß, und da  $A_0$  nach (25) der Wurzel aus der Dichte proportional ist<sup>3)</sup>, so folgt

1) H. Kamerlingh Onnes u. A. Perrier, Proc. Amsterdam 16. p. 901. 1914.

2) P. Weiss u. Piccard, Compt. rend. 155. p. 1234. 1912.

3) Meine früher gemachte Annahme (Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. a. a. O.), daß  $A_0$  der Dichte proportional ist, ist unberechtigt.

$$(80) \quad \chi \sqrt{q} = C \psi \left( \frac{T}{\Theta' \sqrt{q}} \right).$$

In dieser Formel sind  $C$  und  $\Theta'$  Konstanten.

Es muß also  $\chi \sqrt{q}$  als Funktion von  $T/\sqrt{q}$  denselben Verlauf zeigen, den bei festen Körpern  $\chi$  als Funktion von  $T$  hat.

Um dies zu prüfen, berechnen wir folgende Tabelle aus den Beobachtungen:

$\frac{T}{\sqrt{q}}$	$\chi \sqrt{q} \cdot 10^6$	$\frac{T}{\sqrt{q}}$	$\chi \sqrt{q} \cdot 10^6$
57,09	320,7	183,9	203,2
63,77	301,6	147,7	188,7
70,58	284,8	161,4	174,6
74,40	290,5	173,0	170,8
82,06	271,6	190,7	156,2
89,69	254,3	208,4	142,5
101,5	247,4	227,1	133,6
111,9	227,7	273,2	122,0
122,1	283,2	803,4	3,858

Sauerstoff-Stickstoff-Mischungen.

$$C = 472,2 \cdot 10^{-6}; \quad \Theta' = 148,0.$$

$$\uparrow \chi \sqrt{q} \cdot 10^6$$

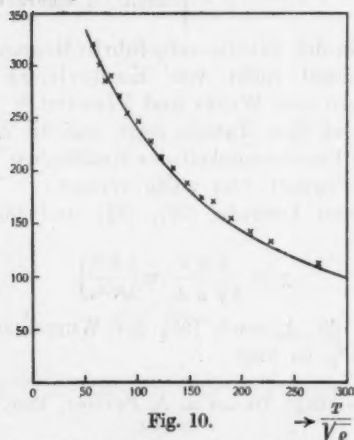


Fig. 10.

$$\rightarrow \frac{T}{\sqrt{q}}$$

und zeichnen in Fig. 10 die mit den Werten

$$C = 472,2 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \Theta' = 148,0$$

berechnete theoretische Kurve. Die Kreuze bezeichnen die beobachteten Werte.

Man wird die Übereinstimmung befriedigend nennen, wenn man berücksichtigt, daß der Punkt

$$\frac{T}{\sqrt{\varrho}} = 8034; \quad \chi \sqrt{\varrho} \cdot 10^6 = 3,853,$$

welcher der Beobachtung von Weiss und Piccard entspricht, *exakt* auf der Kurve liegt, daß also der Bereich der Variablen sehr groß ist, und wenn man ferner bedenkt, daß in dem vorliegenden Falle der  $O_2 = M_2$ -Mischungen viel mehr von der Theorie verlangt wird als bei der Behandlung fester Körper, nämlich die Darstellung der spezifischen Suszeptibilität als Funktion der Temperatur und der Konzentration.

#### § 9. Berechnung der molekularen Konstanten.

Es erübrigt sich noch, für die behandelten Substanzen die folgenden molekulartheoretisch interessanten Größen zu berechnen: 1. Die Anzahl Magnetonen  $p$  im Elementarmagneten nach Weiss; 2. das wahrscheinlichste molekulare Feld  $A_0$ ; 3. die kleinste Entfernung  $s$  zweier Elementarmagnete; 4. die wahrscheinlichste Schwingungszahl  $\nu_0$  des Elementarmagneten im molekularen Felde; 5. das Trägheitsmoment  $J$  des Elementarmagneten.

Für sehr hohe Werte von  $T$  gilt nach Formel (50), (31) und (33) die Langevin-Weiss'sche Beziehung

$$\chi T = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \chi_0 \Theta = \frac{N \mu^2}{3 k}.$$

Da wir angenommen haben, daß das Molekül nur einen starren Elementarmagneten enthält, so folgt durch Erweiterung mit dem Molekulargewicht  $M$  und Einführung der molekularen Suszeptibilität  $\chi_m = \chi \cdot M$ , indem wir berücksichtigen, daß

$$NM = N_0$$

ist ( $N_0 = 6,175 \cdot 10^{23}$  Loschmidt'sche Zahl<sup>1)</sup>), daß das magnetische Moment des Grammmoleküls

1) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung, p. 162. Leipzig 1906.

$$(81) \quad \mu N_0 = \sqrt{3 R \chi_m T} = \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{\pi} R M \chi_0 \Theta}$$

ist ( $k N_0 = R = 8,315 \cdot 10^7$  universelle Gaskonstante).

Enthält das Molekül  $q$  magnetische Atome, so soll nach Weiss  $\mu N_0/q$  ein ganzzahliges Multiplum  $p$  von 1123,5 sein, oder

$$(82) \quad p = \frac{9.358}{q} \sqrt{M \chi_0 \Theta}.$$

Den Wert von  $q$  setzt Weiss auch bei Salzen, die, wie etwa  $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ , mehrere Eisenatome haben, gewöhnlich gleich Eins.

Den direkt aus (82) ausgerechneten Wert nennen wir  $p'$ , den auf die nächste ganze Zahl abgerundeten  $p$ .

Das wahrscheinlichste molekulare Feld  $A_0$  berechnet sich aus (33) zu

$$(83) \quad A_0 = \Theta \frac{k}{\mu} = \frac{\Theta N_0 k}{\mu N_0} = \frac{\Theta R}{p' q 1123,5} = 74030 \frac{p' q}{\Theta}.$$

Die kleinstmögliche Entfernung  $s$  zweier Elementarmagnete ergibt sich nach (25) aus der Formel

$$(84) \quad s^3 = \frac{16 \pi}{9} \frac{\mu^3 N_0 q}{A_0^3 M} = \frac{16 \pi}{9} \frac{1123,5^3}{N_0} \frac{q^3 p'^3 q}{A_0^3 M}.$$

Nach Gleichung (71) ist die häufigste Schwingungszahl

$$(85) \quad \nu_0 = \frac{k \vartheta}{h},$$

wo nach Planck<sup>1)</sup>

$$h = 6,548 \cdot 10^{-27}; k = 1,346 \cdot 10^{-16}$$

bedeutet.

Das Trägheitsmoment  $J$  berechnet sich schließlich aus (68) zu

$$(86) \quad J = \frac{\mu A_0}{4 \pi^2 \nu_0^2} = \frac{1123,5}{4 \pi^2 N_0} \frac{q p' A_0}{\nu_0^2} = 4,067 \cdot 10^{-23} \frac{q p' A_0}{\nu_0^2}.$$

So ergibt sich die auf p. 197 stehende Tabelle.

**Bemerkungen:** 1. Die Zahlen  $p'$  sind für kristallisiertes Eisensulfat, kristallisiertes Mangansulfat, Platin und Sauer-

1) M. Planck, l. c. p. 164.

Substanz	$M$	$q$	$\chi_0 \cdot 10^6$	$\Theta$	$\vartheta$	$p'$	$p$	$A_0 \cdot 10^{-5}$ in Gauß	$s \cdot 10^9$ in cm	$\nu_0 \cdot 10^{12}$ in sec <sup>-1</sup>	$J \cdot 10^{10}$ in g/cm <sup>3</sup>
FeSO <sub>4</sub> · 7H <sub>2</sub> O	278,0	1,90	2212	12,64	—	26,09	26	0,3587	3,46	—	—
MnSO <sub>4</sub> · 4H <sub>2</sub> O	223,1	2,11	4387	9,900	—	29,13	29	0,2516	5,25	—	—
Fe <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> ( $q=1$ )	399,9	3,10	302,0	120	—	35,63	36	2,494	1,22	—	—
Pt <sub>2</sub> ( $q=4$ ) . . .	780,8	21,4	1,089	2097	50,0	3,12	3	124,3	0,0632	1,08	67,7
MnSO <sub>4</sub> . . . .	151,0	2,95	670	84,94	23,5	27,44	27	2,292	1,47	0,483	12,4
O <sub>2</sub> ( $q=2$ ) . . .	32,0	—	$\frac{472,2}{\sqrt{e}}$	148,0 $\sqrt{e}$	—	7,00	7	7,830 $\sqrt{e}$	0,485	—	—

stoff mit recht großer Annäherung ganze Zahlen, wie es die Weiss'sche Magnetonentheorie verlangt, während die Übereinstimmung zwischen  $p'$  und  $p$  bei Fe<sub>2</sub>(SO<sub>4</sub>)<sub>3</sub> und MnSO<sub>4</sub> zu wünschen übrigläßt. Es ist jedoch zu betonen, daß die Unsicherheit, die dem Weiss'schen Gesetze anhaftet, auf die übrigen molekularen Konstanten ohne Einfluß ist.

2. Die molekularen Felder sind sehr beträchtlich; Kristallwasser scheint sie zu erniedrigen, wahrscheinlich durch Vergrößerung der kleinsten Strecke  $s$ , auf die sich zwei Elementarmagnete nähern können.

3. Vergleicht man die Werte von  $s$  mit den nach verschiedenen Methoden bestimmten Durchmessern der Moleküle (vgl. z. B. Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 4. Aufl. Berlin 1912. p. 141), so zeigt sich, daß jene durchweg der Größenordnung nach 10mal so klein sind als die Moleküldurchmesser, was verständlich ist, wenn man annimmt, daß die Elementarmagnete exzentrisch im Molekül sitzen können. Diese Tatsache kann aber auch darauf hindeuten, daß die molekularen Felder vielleicht nicht rein magnetischer Natur ist. Der von mir<sup>1)</sup> früher gezogene Schluß, die Molekularfelder könnten nicht magnetischen Ursprungs sein, ist auf Grund der hier entwickelten vollkommeneren Theorie hinfällig.

4. Die Wellenlänge, welche der Schwingungszahl  $1,08 \cdot 10^{12}$  der Magnetonen im Platin entspricht, ist 0,3 mm, beim MnSO<sub>4</sub> sogar doppelt so groß.

5. Die Trägheitsmomente sind ihrer Größenordnung nach in beachtenswerter Übereinstimmung mit den Werten, die

1) R. Gans, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 16. p. 970. 1914.

Bjerrum<sup>1)</sup> kürzlich für HCl und für H<sub>2</sub>O aus den Wellenlängen ultraroter Absorptionsbanden ermittelt hat; er findet für HCl  $J = 5,4 \cdot 10^{-40}$ , für H<sub>2</sub>O  $J_1 = 0,96 \cdot 10^{-40}$ ;  $J_2 = 2,21 \cdot 10^{-40}$ .

La Plata, Instituto de Física, 20. August 1915.

1) N. Bjerrum, Nernst-Festschrift, p. 90, Halle 1912; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 16, p. 640. 1914; Verh. d. Solvey-Kongresses, herausgegeben von A. Eucken, Halle 1914, p. 405.

(Eingegangen 2. Dezember 1915.)

### 3. *Ein zweidimensionales Dispersionsproblem*<sup>1)</sup>; *von Clemens Schaefer und Helene Stallwitz.*

#### § 1.

Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Zylinder aus beliebigem Material ist bereits früher<sup>2)</sup> streng behandelt worden. Dagegen sind zahlreiche an ebenen Gittern aus Zylindern beobachtete Erscheinungen noch ungeklärt. Dahin gehören z. B. die von F. Braun<sup>3)</sup> beobachteten Polarisationserscheinungen an auf Glasplatten niedergeschlagenen, zerstäubten Metallen, die er unter Annahme einer submikroskopischen Gitterstruktur durch Hertz'sche Gitterwirkung erklärt. Dieser Schluß ist jedoch nicht bündig, worauf der eine von uns in Verbindung mit F. Reiche<sup>4)</sup> hingewiesen hat. Allerdings macht eine theoretische Untersuchung dieser Autoren über die Beugung von Lichtwellen an einem Zylinder es wahrscheinlich, daß F. Braun mit seiner Erklärung recht hat; doch kann man aus der Erscheinung an einem Draht nicht mit Sicherheit auf diejenige an einem engen Gitter schließen, weshalb eine Erweiterung der Theorie in dieser Richtung notwendig ist.

Wir haben uns daher die folgende, in nahem Zusammenhange mit all diesen Gitterproblemen stehende Aufgabe gestellt: Aus der bekannten Lösung des Beugungsproblems für einen Zylinder sollen die elektromagnetischen und optischen

1) Eine kurze Mitteilung der in vorliegendem Aufsätze enthaltenen Resultate ist in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften, p. 674, 1913, erschienen. Ausführlich in der Breslauer Diss. von H. Stallwitz.

2) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905. — W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 746. 1905. — C. Schaefer, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. p. 326. 1909. — C. Schaefer u. Fr. Grossmann, Ann. d. Phys. 31. p. 455. 1910.

3) F. Braun, Ann. d. Phys. 16. p. 1. 1905.

4) C. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 32. p. 577. 1910.

Konstanten eines Mediums hergestellt werden, das dadurch entsteht, daß ins Vakuum in gegen die Wellenlänge der auftallenden Strahlung kleinen Abständen parallele Zylinder aus beliebigem Material eingebettet werden. Eine sehr dünne Schicht eines solchen Mediums darf wohl mit einem Hertz-schen (und Braunschen) Gitter identifiziert werden. Ist diese Aufgabe gelöst, so haben wir also die Möglichkeit, die erhaltenen Formeln auf die von Braun entdeckten Erscheinungen anzuwenden. Das war wenigstens der Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung. Aber auch unabhängig davon dürften die Resultate derselben ein selbständiges Interesse besitzen.

Unsere Untersuchung steht am nächsten einer Arbeit von R. Gans und H. Happel<sup>1)</sup>, die das analoge Problem für ein Medium lösen, in das Kugeln eingelagert sind; diese Autoren benutzen in derselben Weise die Untersuchung von G. Mie<sup>2)</sup> über die Beugung an einer Kugel, wie wir im folgenden die zitierten Arbeiten über Beugung an einem Zylinder verwerten. Insofern wir im folgenden zeigen werden, daß das von uns betrachtete Medium Dispersion und Absorption besitzt, steht unsere Arbeit in Beziehung zu allen Dispersions-theorien, insbesondere der von M. Planck<sup>3)</sup> entwickelten. Sie geht insofern über die Gans-Happelsche und Planck-sche Untersuchung hinaus, als unser zugrunde gelegtes Medium auch die Eigenschaft der Doppelbrechung besitzt.

## § 2.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel oder senkrecht zur Zylinderachse gerichtet ist, die wir im folgenden kurz als „parallelen Fall“ und „senkrechten Fall“ bezeichnen werden. Wir behandeln zunächst den parallelen Fall; wenn notwendig, unterscheiden wir die entsprechenden Größen durch Indizes  $\parallel$  oder  $\perp$  voneinander.

Wenn eine ebene Welle (Fig. 1)  $e^{in(t+x/\epsilon)}$ , parallel zur negativen  $x$ -Richtung fortschreitend, auf einen Zylinder

1) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. 29. p. 277. 1909.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

3) M. Planck, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. p. 470. 1902; p. 480. 1903; p. 740. 1904.



(Radius  $\varrho$ , Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_2$ , Leitfähigkeit  $\sigma_2$ , Permeabilität  $\mu_2 = 1$ ), dessen Achse parallel der  $z$ -Achse ist und dessen Mittelpunktskoordinaten  $(\xi, \eta)$  sind, auffällt, so ergibt

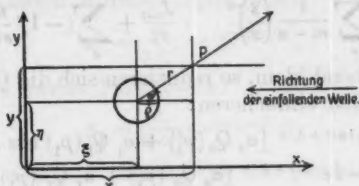


Fig. 1.

sich<sup>1)</sup> für die elektrische und magnetische Kraft der von ihm ausgehenden Störung im Punkte  $(x, y)$  oder  $(r, \varphi)$ :

$$(1) \quad \begin{cases} e_{||} = e^{i n(t + \xi/c)} \sum_{m=0}^{\infty} a_m Q_m(p_1) \cos m \varphi, \\ h_{||} = -i e^{i n(t + \xi/c)} \sum_{m=0}^{\infty} a_m Q'_m(p_1) \cos m \varphi. \end{cases}$$

Die Koeffizienten  $a_m$  sind definiert durch die Gleichung

$$(2) \quad \frac{2 i \pi}{a_m} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K'_m(\pi_1) - \frac{J'_m(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} K_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1) \frac{J'_m(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} J'_m(\pi_2)} + \frac{i \pi}{2},$$

wobei für  $m = 0$  der Faktor 2 auf der linken Seite zu streichen ist. Dabei bedeuten:

$$(3) \quad \begin{cases} r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2; \lambda \text{ die Wellenlänge im Vakuum;} \\ k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}; k_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 \varepsilon_2}{\lambda^2} - \frac{8\pi \sigma_2 i}{c \lambda}}, \\ p_1 = k_1 r; p_2 = k_2 r; \pi_1 = k_1 \varrho; \pi_2 = k_2 \varrho. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(4) \quad Q_m(x) = K_m(x) - \frac{i \pi}{2} J_m(x),$$

wobei:

$$(5) \quad J_m(x) = \frac{x^m}{2 \cdot 4 \dots 2m} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2m+2)(2m+4)} - \dots \right\},$$

1) Vgl. z. B. C. Schaefer u. F. Grossmann, Ann. d. Phys. 81. p. 459ff. 1910.

und:

$$(6) \quad \begin{cases} K_m(x) = J_m(x) \lg \frac{2}{\gamma x} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) J_m(x) \\ + \frac{m!}{2} \sum_s^{0,1,\dots,m} \frac{1}{m-s} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-s} \cdot \frac{J_s(x)}{s!} + \sum_s^{0,\infty} (-1)^s \frac{m+2s}{s(m+s)} J_{m+2s}(x). \end{cases}$$

Ist  $e/\lambda$  hinreichend klein, so reduzieren sich die Gleichungen (1) auf die folgenden einfacheren:

$$(7) \quad \begin{cases} e = e^{in(t+\xi/c)} [a_0 Q_0(p_1) + a_1 Q_1(p_1) \cos \varphi], \\ \eta = -ie^{in(t+\xi/c)} [a_0 Q_0'(p_1) + a_1 Q_1'(p_1) \cos \varphi]. \end{cases}$$

Man kann also setzen:

$$(8) \quad e = e_0 + e_1; \quad \eta = \eta_0 + \eta_1.$$

Die Glieder mit dem Index 0 bezeichnen wir als die erste, entsprechend die mit dem Index 1 als die zweite „Partialwelle“. Es ist also:

$$(9) \quad \begin{cases} e_0 = e^{in(t+\xi/c)} a_0 Q_0(p_1); \quad \eta_0 = -ie^{in(t+\xi/c)} a_0 Q_0'(p_1); \\ e_1 = e^{in(t+\xi/c)} a_1 Q_1(p_1) \cos \varphi; \quad \eta_1 = -ie^{in(t+\xi/c)} a_1 Q_1'(p_1) \cos \varphi. \end{cases}$$

Für kleine Argumente  $p_1$ , d. h. für kleine Werte von  $r$ , lassen sich die magnetischen Kräfte  $\eta_0$  und  $\eta_1$  schreiben:

$$(10) \quad \begin{cases} \eta_0 = \frac{i a_0}{k_1} e^{in(t+\xi/c)} \cdot \frac{1}{r}; \\ \eta_1 = -\frac{i a_1}{k_1^2} e^{in(t+\xi/c)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) = + \frac{i a_1}{k_1^2} e^{in(t+\xi/c)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r}\right); \end{cases}$$

$\eta_0$  kann also als das Magnetfeld eines geradlinigen Wechselstromes von der Stärke

$$\frac{a_0 i n}{2 k_1^2} e^{in(t+\xi/c)}$$

betrachtet werden;  $\eta_1$ , wie der Faktor

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r}\right)$$

anzeigt, als dasjenige zweier um ein unendlich kleines Stück längs der  $x$ -Achse verschobener, entgegengesetzt gerichteter Wechselströme. Das Produkt aus der Verschiebung der Mittelpunkte und der Stromstärke ist hier:

$$\frac{a_1 i n}{2 k_1^2} e^{in(t+\xi/c)}.$$

1)  $\text{Log } \gamma = 0,5772$ , die sog. Mascheronische Konstante.

Ähnlich lassen sich die höheren Glieder deuten; dies entspricht dem Analogon für die Kugel, bei der an Stelle der geradlinigen Ströme „Dipole“ auftreten.<sup>1)</sup> Für das Moment des  $h_0$  äquivalenten Stromes ergibt sich:

$$(11a) \quad p_0 = \frac{a_0}{2k_1^3} \cdot e^{in(t+\varepsilon/c)},$$

analog für die zweite Partialwelle:

$$(11b) \quad p_1 = \frac{a_1}{2k_1^3} \cdot e^{in(t+\varepsilon/c)},$$

und daraus, wenn die Anzahl der die Flächeneinheit durchsetzenden Zylinder  $N$  ist, für die den beiden Partialwellen entsprechenden Polarisationen pro Volumeinheit:

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_0 = Np_0 = \frac{Na_0}{2k_1^3} \cdot e^{in(t+\varepsilon/c)}, \\ \mathfrak{P}_1 = Np_1 = \frac{Na_1}{2k_1^3} \cdot e^{in(t+\varepsilon/c)}. \end{cases}$$

Die Polarisationen sind also proportional der erregenden Welle; ist diese nicht  $e^{in(t+\varepsilon/c)}$ , sondern  $\mathfrak{E}$  (oder  $\mathfrak{H}$ ), so wird aus (12):

$$(12a) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_0 = \frac{Na_0}{2k_1^3} \mathfrak{E} \text{ oder } \frac{Na_0}{2k_1^3} \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{P}_1 = \frac{Na_1}{2k_1^3} \mathfrak{E} \text{ oder } \frac{Na_1}{2k_1^3} \mathfrak{H}. \end{cases}$$

Im folgenden entsprechen sich übrigens nicht  $\mathfrak{P}_0$  und  $\mathfrak{P}_1$ , sondern  $\mathfrak{P}_0$  und

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x},$$

welche auch von gleicher Dimension sind.<sup>2)</sup>

Die elektrischen und magnetischen Kräfte lassen sich leicht auf Vektorpotentiale ( $a_0, a_1$ ) zurückführen — die skalaren Potentiale sind bei unserem Problem gleich Null —, und zwar in folgender Weise:

Nennen wir das Vektorpotential und das Skalarpotential zunächst allgemein  $\mathfrak{A}$  und  $\psi$ , so ist nach der Elektronentheorie:

$$(13) \quad \begin{cases} \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{P} = 0, \\ \Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \end{cases}$$

1) Vgl. die genannte Arbeit von Gans und Happel.

2) Vgl. dazu etwa H. A. Lorentz, Theory of Electrons, p. 16, Art. 11.

und die rechte Seite der ersten Gleichung (13) verschwindet bei uns, weil hier offenbar  $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$  ist. Da die Lösungen der homogenen Gleichung (13), der Wellengleichung, in der Elektronentheorie im allgemeinen nicht in Betracht kommen<sup>1)</sup>, so dürfen wir also zunächst  $\psi = 0$  setzen. Dann ist weiter allgemein:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \\ \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \end{cases}$$

wenn mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  allgemein elektrischer und magnetischer Vektor bezeichnet werden. Also ist speziell bei uns:

$$(15) \quad \begin{cases} e_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial a_0}{\partial t}, & h_0 = \operatorname{rot} a_0, \\ e_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial a_1}{\partial t}, & h_1 = \operatorname{rot} a_1 \end{cases}$$

und durch Vergleich mit (9), (10) und (11) folgt daraus sofort:

$$(16) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{i a_0}{k_1} e^{i n(t+z/c)} \cdot Q_0(k_1 r) = \frac{2}{c} \frac{\partial v_1}{\partial t} Q_0(k_1 r), \\ a_1 = \frac{i a_1}{k_1^2} e^{i n(t+z/c)} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi}(k_1 r) = \frac{2}{c} \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(k_1 r). \end{cases}$$

Für den senkrechten Fall ergibt sich analog (1):

$$(17) \quad \begin{cases} h_{\perp} = e^{i n(t+z/c)} \cdot \sum_m d_m Q_m(p_1) \cdot \cos m\varphi, \\ e_{\perp} = i e^{i n(t+z/c)} \cdot \sum_m d_m Q'_m(p_1) \cdot \cos m\varphi, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten  $d_m$  bestimmt sind durch:

$$(18) \quad \frac{2 i^m}{d_m} = \frac{k_2}{k_1} \frac{K'_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1)} - \frac{J'_m(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} \frac{K_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1)} + \frac{i \pi}{2},$$

wobei wieder der Faktor 2 für  $m = 0$  zu streichen ist. Daraus lassen sich alle analogen Bildungen für den senkrechten Fall leicht ableiten.

### § 3.

Die von den einzelnen Zylindern erzeugten Felder  $e, h$  setzen sich im Mittel zu dem Felde  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  der „Maxwellischen Kräfte“ zusammen. Diese sind es jedoch nicht, die einen

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz, *Theory of Electrons* p. 19 und Note 6 p. 240ff.

einzelnen Zylinder zu Schwingungen anregen. Denn zu  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  tragen *alle* Zylinder bei, zu den „erregenden Kräften“  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{H}'$  *alle, mit Ausnahme des erregten selbst*. Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung ist namentlich von Planck<sup>1)</sup> betont worden. Die wichtigste Aufgabe ist also für uns die, den Zusammenhang zwischen  $\mathcal{E}'$ , und  $\mathcal{E}$ , zwischen  $\mathcal{H}'$  und  $\mathcal{H}$  festzustellen. Dies kommt, wenn man  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{H}'$  einerseits und  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  andererseits wieder von Vektorpotentialen ableitet, die wir  $\mathcal{A}'$  bzw.  $\mathcal{A}$  nennen wollen, darauf hinaus,  $\mathcal{A}'$  zu  $\mathcal{A}$  in Beziehung zu setzen. Dann folgen ohne weiteres daraus durch Differentiationen die erregenden Kräfte als Funktionen der Maxwellschen.

Die Potentiale  $\mathcal{A}'$  findet man auf folgende Weise durch eine Mittelwertsbetrachtung, die mutatis mutandis der schon genannten Arbeit von Gans und Happel entnommen werden kann: Wir legen senkrecht zu der Achse der Zylinder eine Ebene durch das Medium und haben nun in dieser Ebene sehr viele stromdurchflossene Kreisflächen (Zylinderquerschnitte). Um das Zentrum  $(\xi, \eta)$  einer dieser Kreisflächen, für die wir die erregende Kraft bzw. deren Vektorpotential feststellen wollen und die deshalb als entfernt zu denken ist, schlagen wir einen Kreis vom Radius  $l$ , der groß gegen den mittleren Abstand zweier Zylinder, aber klein gegen die Wellenlänge ist. Der Raum außerhalb dieses Kreises kann als gleichmäßig polarisiert angesehen werden. Die (mittlere) Einwirkung der innerhalb dieses Kreises liegenden Stromflächen stellen wir in folgender Weise fest: Wir schlagen um *jeden* im Innern des gedachten Kreises vom Radius  $l$  liegenden Zylinder („Resonator“) ebenfalls einen Kreis vom Radius  $l$ , denken den Resonator dann entfernt und bringen diese verschiedenen Kreisflächen zur Deckung: Dann entsteht ein *Kreisring*, dessen innerer Radius  $R$  gleich dem kleinsten Abstände zweier Zylinderresonatoren ist, und dessen äußerer Radius  $l$  ist. Der Kreisring wird wegen der vielfachen Übereinanderlagerung, wodurch sich alle etwa vorhandenen Individualitäten ausgleichen, ebenfalls gleichmäßig polarisiert sein, und zwar wird seine Polarisierung gleich  $m\mathcal{P}$  sein, wenn  $m$  Kreise übereinander gelagert wurden. Die (mittlere) Polarisierung eines einfachen Kreises vom Radius  $l$ , die wir ja kennen wollen, erhalten wir also durch Division mit  $m$ ; es ergibt sich also der Wert  $\mathcal{P}$ .

1) M. Planck, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. p. 470. 1902.

Nun ist das Vektorpotential  $a_0$  eines Zylinders nach (16):

$$a_0 = \frac{2}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r)$$

(natürlich nur für die erste Partialwelle) und, da der Raum außerhalb eines Zylinders im Mittel als gleichmäßig polarisiert angesehen werden darf, seine Polarisation pro Volumeinheit  $\mathfrak{P}_0$ , also das Vektorpotential pro Volumeinheit unter Berücksichtigung der letzten Gleichung

$$\frac{2}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r).$$

Betrachten wir ein Volumelement von der Grundfläche  $dF$  und der Höhe 1, so ist das Vektorpotential  $d\mathfrak{A}_0'$  pro Volumelement:

$$d\mathfrak{A}_0' = \frac{2}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) \cdot dF;$$

also folgt durch Integration über den ganzen Außenraum, was wir kurz durch die Grenzen  $R$  und  $\infty$  andeuten, für  $\mathfrak{A}_0'$  der Wert:

$$(19a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}_0' &= \frac{2}{c} \int_R^\infty \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF \\ &= \frac{N i a_0}{k_1} \int_R^\infty e^{i n(t + \xi/c)} Q_0(k_1 r) dF. \end{aligned} \right.$$

Ebenso folgt für das aus  $a_1$  abgeleitete Potential  $\mathfrak{A}_1'$  der zweiten Partialwelle:

$$(19b) \quad \mathfrak{A}_1' = \frac{N i a_1}{k_1^2} \int_R^\infty e^{i n(t + \xi/c)} \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} (k_1 r) dF.$$

Aus  $\mathfrak{A}_0'$  und  $\mathfrak{A}_1'$  leitet sich durch Differentiation das Feld der erregenden Kräfte  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{H}'$  ab.

Jetzt haben wir  $\mathfrak{A}_0$  und  $\mathfrak{A}_1$  zu berechnen, aus denen sich das Feld  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  der Maxwell'schen Kräfte ergibt. Dazu haben wir die partiellen Differentialgleichungen (13) zu integrieren, was mittels des zweidimensionalen Greenschen Satzes leicht geschieht. Streichen wir auch hier wieder die Glieder, die der Lösung der homogenen Gleichungen (13) entsprechen, so folgt aus (13) allgemein:

$$\psi = 0,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{c} \int_0^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF.$$

Also folgt für  $\mathfrak{A}_0$  jedenfalls, indem man einfach  $\mathfrak{P}$  durch  $\mathfrak{P}_0$  nach (12) ersetzt:

$$(20a) \quad \mathfrak{A}_0 = \frac{2}{c} \int_0^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF,$$

und ebenso, nach einer in § 2 gemachten Bemerkung:

$$(20b) \quad \mathfrak{A}_1 = -\frac{2}{c} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial \xi} \right) Q_0(k_1 r) dF,$$

womit der schwierigste Teil der Betrachtung erledigt ist.

Um nun den Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{S}'$  und  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{S}$  zu finden, haben wir nur  $\mathfrak{A}'$  mit  $\mathfrak{A}$  in Beziehung zu setzen.

Nehmen wir zunächst  $\mathfrak{A}_0'$  und  $\mathfrak{A}_0$ , so ist nach (19a) und (20a):

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{2}{c} \int_0^R \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF + \frac{2}{c} \int_R^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF,$$

also:

$$(21) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0' + \frac{2}{c} \int_0^R \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} Q_0(k_1 r) dF \\ = \mathfrak{A}_0' + \frac{N i a_0}{k_1} \int_0^R e^{i n(t + \xi/c)} Q_0(k_1 r) dF. \end{cases}$$

Wegen der Kleinheit von  $R$  im Vergleich zur Wellenlänge können wir  $e^{i n(t + \xi/c)}$  aus dem Integralzeichen heraussetzen, und durch seinen Wert im Mittelpunkt  $e^{i n(t + \pi/c)}$  ersetzen; gleichfalls dürfen wir für  $Q_0(k_1 r)$  die Annäherung für kleine Argumente benutzen. So folgt:

$$(22) \quad \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0' + \frac{N i a_0}{k_1} e^{i n(t + \pi/c)} \int_0^R \ln \frac{2}{r k_1 r i} dF.$$

Das Integral

$$\int_0^R \log \frac{2}{r k_1 r i} dF$$



stellt das innere Potential einer homogenen Kreisfläche dar;<sup>1)</sup> es ist also:

$$\int_0^R \log \frac{2}{\gamma k_1 r^2} dF = \pi \left[ \left\{ R^2 \left( \ln \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} r^2 \right\} + R^2 \ln \frac{2}{\gamma k_1} \right].$$

Schließlich folgt, wenn wir allgemeiner  $e^{i\pi(t+x/c)}$  durch  $\mathfrak{E}$  ersetzen:

$$(23) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 - \\ \mathfrak{E}' \cdot \frac{N i a_1}{k_1} \pi \left[ \left\{ R^2 \left( \ln \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} r^2 \right\} + R^2 \ln \frac{2}{\gamma k_1} \right] \end{cases}$$

Ebenso, nur in der Rechnung etwas komplizierter, folgt für die zweite Partialwelle:

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}_1 - \frac{N i a_1}{k_1^2} e^{i\pi(t+x/c)} \int_0^R \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{2}{\gamma k_1 r^2} \right] dF,$$

oder, wenn die einfallende Welle nicht  $e^{i\pi(t+x/c)}$ , sondern  $\mathfrak{E}'$  ist, unter Rücksicht auf (12):

$$(24) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}_1 + \frac{N i a_1}{k_1^2} \mathfrak{E}' \pi (x - \xi), \\ = \mathfrak{A}_1 + 2\pi \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x} (x - \xi). \end{cases}$$

Durch Ausführung der in (14) geforderten Differentiationen folgt dann sofort:

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, \\ \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 2\pi \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x}. \end{cases}$$

#### § 4.

Die hier auftretende Verschiedenheit von  $\mathfrak{H}'$  und  $\mathfrak{H}$  beweist, daß

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x}$$

einer magnetischen Polarisation  $\mathfrak{P}_m$  gleichwertig<sup>2)</sup> ist. Um dies einzusehen, erörtern wir folgendes Problem:

In einem Medium von der Permeabilität  $\mu$  bestehe ein homogenes magnetisches Feld; der Vektor  $\mathfrak{H}$  sei parallel der

1) Vgl. z. B. A. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen Bd. I. p. 142. 1909.

2) Vgl. hierzu auch: Minkowski-Born, Math. Ann. 68. 526ff. 1910.



$y$ -Achse orientiert. Wir nehmen aus diesem Medium einen Zylinder vom Radius  $\varrho$ , dessen Achse parallel der  $z$ -Achse gerichtet ist, heraus. Das ursprüngliche Feld erfährt eine Änderung; wir wollen den neuen Vektor mit  $\mathfrak{H}'$  bezeichnen. Dieser läßt sich aus einem skalaren Potentiale  $\Phi$  ableiten, das folgenden Bedingungen zu genügen hat:

In der ganzen  $x y$ -Ebene — auf diese kann man sich offenbar beschränken — gilt die zweidimensionale Laplacesche Gleichung:

$$(a) \quad \Delta \Phi = 0.$$

Versehen wir ferner das Potential für den Außenraum mit dem Index  $a$ , für den Innenraum des Zylinders mit dem Index  $i$ , so gilt im Unendlichen der  $x y$ -Ebene:

$$(b) \quad \left( \frac{\partial \Phi_a}{\partial y} \right)_{r=\infty} = -\mathfrak{H}'_{\infty} = -\mathfrak{H},$$

welche Gleichung zum Ausdruck bringt, daß in unendlicher Entfernung vom Zylinder die durch ihn verursachte Störung verschwindet. Ferner muß im Innern des Zylinders sein:

$$(c) \quad \Phi_i = \text{endlich},$$

und an seiner Grenzfläche ( $r = \varrho$ ) gelten die bekannten Grenzbedingungen der Magnetostatik:

$$(d) \quad \begin{cases} \Phi_i = \Phi_a, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \mu \frac{\partial \Phi_a}{\partial n}. \end{cases}$$

Setzen wir  $\Phi = \Psi(r) \cdot \cos \varphi$ , wo  $\varphi$  der Winkel ist, den der Radiusvektor  $r$  mit der  $y$ -Achse bildet, so lautet die Laplacesche Gleichung (a) in ebenen Polarkoordinaten:

$$(e) \quad \Psi''(r) + \frac{1}{r} \Psi'(r) - \frac{1}{r^2} \Psi(r) = 0,$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$(f) \quad \Psi(r) = A r + \frac{B}{r}.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung (c) für  $\Phi_i$  ergibt sich:

$$(g) \quad \begin{cases} \Phi_i = A_i \cdot r \cdot \cos \varphi, \\ \Phi_a = \left( A_a \cdot r + \frac{B_a}{r} \right) \cos \varphi. \end{cases}$$

Für die übrigen Konstanten folgt aus den Grenzbedingungen:

$$(9) \quad \begin{cases} A_a = -\mathfrak{H}, \\ A_i = -\frac{2\mu}{\mu+1}\mathfrak{H}, \\ B_a = -\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)\varrho^2 \cdot \mathfrak{H}. \end{cases}$$

Daher ist:

$$(i) \quad \Phi_i = -\frac{2\mu}{\mu+1}y \cdot \mathfrak{H}$$

und für den neuen Feldvektor  $\mathfrak{H}'$  im Innern des Zylinders folgt durch Differentiation:

$$(x) \quad \mathfrak{H}' = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \mathfrak{H} + \frac{\mu-1}{\mu+1}\mathfrak{H}.$$

Dieser neue Wert  $\mathfrak{H}'$  ist offenbar das Analoge, wie bei unserem eigentlichen Problem die „erregende Kraft“, während das ursprüngliche Feld  $\mathfrak{H}$  mit der sogenannten „Maxwellschen Kraft“ zu identifizieren ist. Denn um die erregenden Kräfte zu berechnen, mußten wir ja auch den „erregten“ Zylinder aus dem Medium entfernen, wodurch eben die Maxwell'schen Kräfte in die erregenden übergehen.

Jedenfalls sieht man aus (x), daß  $\mathfrak{H}'$  von  $\mathfrak{H}$  nur dann verschieden ist, wenn  $\mu \neq 1$ , d. h. wenn eine magnetische Polarisation  $\mathfrak{P}_m$  existiert. Wir können also die letzte Gleichung in der Form schreiben, wenn die übliche Definition der magnetischen Polarisation benutzt wird:

$$(1) \quad \mathfrak{H}' - \mathfrak{H} = 2\pi \mathfrak{P}_m.$$

Vergleichen wir dies mit (25), so sieht man in der Tat, daß, wie behauptet,

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x}$$

einer magnetischen Polarisation entspricht.

### § 5.

Nach dieser Einschaltung ziehen wir die Gleichungen der Elektronentheorie für die dielektrische Verschiebung  $\mathfrak{D}$  und die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  heran:

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{P}_m. \end{cases}$$

wo  $\mathfrak{E}$ , und  $\mathfrak{H}$ , elektrische und magnetische Polarisation bedeuten; dann wird also nach (25) und (2):

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}_0, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} - 4\pi \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x}. \end{cases}$$

Nennen wir nun  $\bar{\epsilon}_{\parallel}$  und  $\bar{\mu}_{\parallel}$  die mittlere Dielektrizitätskonstante und Permeabilität unseres Mediums, so sind nach (27), (25) und (12a):

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \bar{\epsilon}_{\parallel} \mathfrak{E} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{E} + \frac{2\pi N a_0}{k_1^2} \mathfrak{E}', \\ \mathfrak{B} &= \bar{\mu}_{\parallel} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} - 4\pi \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x} = \mathfrak{H} - \frac{2\pi i N a_1}{k_1^2} \mathfrak{H}'. \end{aligned}$$

Benutzt man noch einmal (25), so werden diese Gleichungen zu:

$$(28) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} = \bar{\epsilon}_{\parallel} \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \left( 1 + \frac{2\pi N a_0}{k_1^2} \right), \\ \mathfrak{B} = \bar{\mu}_{\parallel} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot \frac{1 - \frac{i\pi N a_1}{k_1^2}}{1 + \frac{i\pi N a_1}{k_1^2}}. \end{cases}$$

Daraus folgen sofort für den parallelen Fall Dielektrizitätskonstante und Permeabilität unseres Mediums:

$$(29) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_{\parallel} = 1 + \frac{2\pi N a_0}{k_1^2}, \\ \bar{\mu}_{\parallel} = \frac{1 - i\pi N a_1/k_1^2}{1 + i\pi N a_1/k_1^2} \end{cases}$$

und da  $\bar{\epsilon}_{\parallel} \bar{\mu}_{\parallel} = (\nu_{\parallel} - i\kappa_{\parallel})^2$  ist, wenn  $\nu_{\parallel}$  und  $\kappa_{\parallel}$  Brechungsexponent und Extinktionskoeffizient bedeuten:

$$(30) \quad (\nu_{\parallel} - i\kappa_{\parallel})^2 = \left( 1 + \frac{2\pi N a_0}{k_1^2} \right) \frac{1 - i\pi \frac{N a_1}{k_1^2}}{1 + i\pi \frac{N a_1}{k_1^2}},$$

woraus  $\nu_{\parallel}$  und  $\kappa_{\parallel}$  sich sofort ergeben.

Ganz analog verläuft die Untersuchung für den senkrechten Fall, für den wir deshalb hier nur das Resultat angeben:

$$(31) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_{\perp} = \frac{1 + \frac{i\pi N d_1}{k_1^2}}{1 + \frac{i\pi N d_1}{k_1^2}}, \\ \bar{\mu}_{\perp} = 1 + \frac{2\pi N d_1}{k_1^2}, \end{cases}$$

$$(32) \quad (\nu_{\perp} - i\kappa_{\perp})^2 = \left(1 + \frac{2\pi N d_2}{k_1^2}\right) \frac{1 - \frac{i\pi N d_1}{k_1^2}}{1 + \frac{i\pi N d_1}{k_1^2}}.$$

§ 6.

Die Formeln (29) bis (32) enthalten das gewünschte Resultat. Man kann aus ihnen sofort folgende allgemeine Schlüsse ziehen:

1. Da Dielektrizitätskonstante und Permeabilität, also auch der Brechungsexponent, im parallelen und senkrechten Falle verschiedene Werte haben, *so ist das Medium doppeltbrechend.*

2. Da die Eigenschwingungen der Zylinder dadurch definiert sind<sup>1)</sup>, daß die reellen Teile der Nenner von  $a_m$  und  $d_m$  verschwinden, und diese in beiden Fällen an verschiedenen Stellen des Spektrums liegen, *so ist das Medium dichroitisch.*

3. Brechungsexponent und Extinktionskoeffizient sind im allgemeinen nicht konstant, sondern Funktionen der Wellenlänge. *Das Medium ist also dispergierend und selektiv absorbierend.* Man kann dasselbe also in gewissem Sinne als einfaches Modell eines einachsigen dichroitischen Kristalls betrachten. Allerdings besteht insofern ein Unterschied, als wir hier kein Raumgitter im eigentlichen Sinne des Wortes haben, da die Zylinder ja unregelmäßig angeordnet sind und lediglich parallele Achsen haben. Besser ist daher der Vergleich mit einem sogenannten flüssigen Kristall oder einer anisotropen Flüssigkeit, bei denen nach einem Versuche von van der Lingen<sup>2)</sup> ebenfalls kein Raumgitter vorhanden zu sein scheint. Nach den Untersuchungen Vorländers scheint bei den nicht drehenden anisotropen Flüssigkeiten die Anisotropie durch die langgestreckte Gestalt der Moleküle hervorgerufen zu werden, was durchaus dem Sinne unserer Analogie gemäß ist.<sup>3)</sup> Auf einen weiteren Grund, der diese

1) C. Schaefer u. F. Grossmann, Ann. d. Phys. 81. p. 473ff. 1910.

2) St. v. d. Lingen, Verhdl. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 913. 1913.

3) Auch die kürzlich von Diesselhorst u. Freundlich (Physik. Zeitschr. 16. p. 419. 1915) beschriebene Doppelbrechung des Vanadin-pentoxydsols usw. dürfte damit in Zusammenhang stehen und sich theoretisch verstehen lassen. (Anm. bei der Korr.)

Parallele zu stützen scheint, werden wir gleich zu sprechen kommen.

4. Von Interesse scheint uns ferner der Umstand zu sein, daß die mittlere Permeabilität von 1 verschieden ist, obwohl die Zylinder aus unmagnetischem Material vorausgesetzt sind. Für unendlich große Wellenlängen, d. h. für statische Zustände, geht natürlich  $\bar{\mu}$  in den Wert 1 über, wie es sein muß.

Es liegt nahe, zu fragen, worin dieser Unterschied gegenüber den gewöhnlichen Dispersionstheorien, bei denen die Permeabilität 1 sich ergibt, begründet liegt. Wenn man die zweite Gleichung (29) betrachtet, so erkennt man, daß die Abweichung der mittleren Permeabilität von 1 von dem Koeffizienten  $a_1$ , d. h. von dem Mitwirken der zweiten Partialwelle, abhängt. Würden wir das Verhältnis  $\varrho/\lambda$  so klein wählen, daß der Koeffizient  $a_1$  gegen  $a_0$  verschwindet, so würde, wie in der gewöhnlichen Theorie,  $\bar{\mu} = 1$  folgen. In der gewöhnlichen Theorie berücksichtigt man eben nur die erste Näherung, die erste Partialwelle, um in unserer Ausdrucksweise zu bleiben.

§ 7.

Die Formeln (29) bis (32) sind zu kompliziert, um eine weitere allgemeine Diskussion zuzulassen. Wir wenden sie daher auf einige Spezialfälle an, und zwar betrachten wir in diesem Paragraphen dielektrische Zylinder, bei denen  $\varrho/\lambda$  so klein ist, daß in  $a_m$  und  $d_m$  bereits die vierten Potenzen von  $\varrho/\lambda$  vernachlässigt werden können.

Eine leichte Rechnung ergibt dann<sup>1)</sup> für die Koeffizienten innerhalb der obigen Genauigkeit die Werte:

$$(33) \quad \begin{cases} a_1 = d_0 = 0, \\ a_0 = \frac{2\pi^2 \varrho^2 (\epsilon_2 - 1)}{\lambda^2}; \quad d_1 = i \left( \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 1}. \end{cases}$$

Sind die Zylinder nicht ins Vakuum eingebettet, wie bisher angenommen wurde, sondern in ein Medium von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$ , so hat man ähnlich:

$$(34) \quad a_0 = \frac{2\pi^2 \varrho^2}{\lambda^2} (\epsilon_2 - \epsilon_1); \quad d_1 = i \left( \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}.$$

1) Vgl. z. B. C. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 35. p. 828. 1911.

Man erhält daher aus (29) bis (32):

$$(35) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 + N\pi\varrho^2(\epsilon_2 - \epsilon_1); & \bar{\mu}_1 = 1. \\ \bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 \frac{1 + N\pi\varrho^2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}}{1 - N\pi\varrho^2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}}; & \bar{\mu}_2 = 1. \end{cases}$$

Nun ist  $N\pi\varrho^2 = F$  derjenige Bruchteil der Flächeneinheit, der von den Zylinderquerschnitten eingenommen wird;  $(1 - F)$  also der „freie“ Bruchteil. Setzt man  $F = \delta_2$ ;  $1 - F = \delta_1$ , so kann man die Gleichungen (35) schreiben:

$$(36) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_1 = \delta_1 \epsilon_1 + \delta_2 \epsilon_2; \\ \frac{\bar{\epsilon}_2 - \epsilon_2}{\bar{\epsilon}_2 + \epsilon_2} = \delta_2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}. \end{cases}$$

Dies sind die von O. Wiener<sup>1)</sup> angegebenen, durch elektrostatische Betrachtungen abgeleiteten sogenannten „Formeln der Stäbchendoppelbrechung“, die sich hier als Spezialfälle ergeben. Unsere Ableitung hat den Vorzug, daß sich der Gültigkeitsbereich dieser Formeln genau angeben läßt, was bei der Wiener'schen Herleitung naturgemäß nicht der Fall ist. Die durch Gleichungen (36) bestimmte „Stäbchendoppelbrechung“ ist, wie schon Wiener betont, stets positiv. Dies ist ein weiteres Argument dafür, unser Medium mit der Konstitution der anisotropen Flüssigkeiten in Beziehung zu setzen; denn die Doppelbrechung aller nicht optisch aktiver anisotroper Flüssigkeiten ist nach den Untersuchungen von Dorn und Vorländer stets positiv.<sup>2)</sup>

Man kann die letzten Formeln in Zusammenhang mit der Mosotti-Clausius'schen Theorie der Dielektrika bringen. Setzen wir nämlich in der zweiten Gleichung (36)  $\epsilon_1 = 1$ , d. h. betrachten wir wieder ins Vakuum eingebettete Zylinder, so geht diese Formel über in:

$$\frac{\bar{\epsilon}_2 - 1}{\bar{\epsilon}_2 + 1} = \delta_2 \cdot \text{const.}$$

Da  $\delta_2 = N\pi\varrho^2$ , also proportional der „Dichte“  $d$  des Mediums ist, kann man auch schreiben:

$$(37) \quad \frac{1}{d} \frac{\bar{\epsilon}_2 - 1}{\bar{\epsilon}_2 + 1} = \text{const.}$$

1) O. Wiener, Ber. d. Kgl. Sächs. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 61. p. 113. 1909; 62. p. 263. 1910.

2) Darauf weist ebenfalls schon Wiener hin; l. c. 61. p. 115 u. 116.

Das aber ist das Analogon zu der Clausius-Mosottischen Formel<sup>1)</sup> für einen aus Vakuum und eingebetteten Kugeln bestehenden Mischkörper.

Etwas Ähnliches erhalten wir, wenn wir in der ersten Gleichung (36)  $\varepsilon_1 = 1$  setzen; dann folgt nämlich:

$$(38) \quad \frac{1}{d} (\varepsilon_{||} - 1) = \text{const.},$$

und dies ist das zweidimensionale Analogon zur sogenannten Laplaceschen Formel.<sup>2)</sup>

§ 8.

Als zweites Beispiel wählen wir die Untersuchung der Extinktion für Wellenlängen, die weit ab von jeder Eigenschwingung unseres Mediums liegen. Diese Extinktion zeigt in ihren Gesetzen eine bemerkenswerte Verwandtschaft mit der Rayleighschen *Theorie des Himmelblaus*, als deren zweidimensionales Analogon sie direkt bezeichnet werden kann. Betrachten wir zunächst dielektrische Zylinder, so erhält man für die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  im parallelen Falle:

$$(39) \quad a_0 = \frac{2\pi^2 \varrho^2}{\lambda^2} (\varepsilon_2 - 1) - i 2\pi \frac{\pi^4 \varrho^4}{\lambda^4} (\varepsilon_2 - 1)^2; \quad a_1 = 0;$$

Also gemäß (30), nach Trennung des Reellen vom Imaginären, mit derselben Genauigkeit wie (39):

$$(40) \quad \begin{cases} v_{||}^2 = 1 + N\pi \varrho^2 (\varepsilon_2 - 1), \\ v_{||} x_{||} = \frac{N\pi^4 \varrho^4}{2\lambda^2} (\varepsilon_2 - 1)^2, \end{cases}$$

und daraus endlich:

$$(41) \quad x_{||} = \frac{\pi^2}{2N\lambda^2} \cdot \frac{(v_{||}^2 - 1)^2}{v_{||}}.$$

Ebenso ist für den senkrechten Fall:

$$(42) \quad d_1 = 4\pi \frac{\pi^4 \varrho^4}{\lambda^4} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 1} \right)^2 + i \left( \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 1}; \quad d_0 = 0,$$

und daraus mit demselben Grade von Genauigkeit wie (42) nach (32):

1) Vgl. z. B. A. H. Lorentz, *Theory of Electrons*, p. 145.

2) A. H. Lorentz, *Theory of Electrons*, p. 144.



$$(43) \quad \begin{cases} \nu_{\perp}^2 = \frac{1}{1 - 2\pi N_0^2 \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 1}}, \\ \nu_{\perp} \kappa_{\perp} = \frac{N \frac{\pi^4 \epsilon^4}{\lambda^4} \cdot \left( \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 1} \right)^2}{1 - 2\pi N \epsilon^2 \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 1}}; \end{cases}$$

daraus endlich für  $\kappa_{\perp}$ :

$$(44) \quad \kappa_{\perp} = \frac{\pi^2}{4 N \lambda^3} \cdot \frac{(\nu_{\perp}^2 - 1)^2}{\nu_{\perp}^3}.$$

Es ist nach Definition des Extinktionskoeffizienten  $\kappa$ , wenn  $\mathcal{E}_0$  die in das Medium eindringende elektrische Feldstärke ist:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{2\pi \kappa d}{\lambda}},$$

wenn  $\mathcal{E}$  die elektrische Kraft nach Durchheilen der Strecke  $d$  ist; also ist für die mittlere Energie:

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \overline{\mathcal{E}_0^2} e^{-\frac{4\pi \kappa d}{\lambda}} = \overline{\mathcal{E}_0^2} e^{-h d},$$

woraus:

$$h = \frac{4\pi \kappa}{\lambda}$$

folgt. Aus (41) und (44) folgt demnach für den parallelen und senkrechten Fall:

$$(45) \quad \begin{cases} h_{\parallel} = \frac{2\pi^3}{N\lambda^3} \cdot \frac{(\nu_{\parallel}^2 - 1)^2}{\nu_{\parallel}}, \\ h_{\perp} = \frac{\pi^3}{N\lambda^3} \cdot \frac{(\nu_{\perp}^2 - 1)^2}{\nu_{\perp}^3}, \end{cases}$$

während nach Rayleigh ist:

$$(46) \quad h = \frac{8/3 \cdot \pi^3}{N\lambda^4} \cdot \frac{(\nu^2 - 1)^2}{\nu}.$$

Die Analogie der Formeln (45) mit (46) springt in die Augen; nur ist bei uns die Extinktion proportional  $1/\lambda^3$ , bei Rayleigh  $1/\lambda^4$ . Das durch die Beugung an Kugeln hervorgerufene Blau ist daher intensiver als das durch Beugung an Zylindern entstandene.

Sehr ähnliche Formeln erhält man auch, wenn man die dielektrischen Zylinder durch unendlich gut leitende ersetzt.



## § 9.

Als drittes Beispiel wählen wir folgendes: In das Vakuum seien Wasserzylinder vom Radius  $\varrho = 0,2$  cm eingelagert; ihre mittlere Entfernung voneinander  $1/\sqrt{N}$  sei gleich 1, also  $N = 1$ . Für den parallelen und senkrechten Fall sind nach den allgemeinen Formeln (30) und (32) Brechungsexponent und Extinktionskoeffizient zwischen  $\lambda = 5$  cm und  $\lambda = \infty$  berechnet worden; für kleinere Wellenlängen gelten die Formeln nicht mehr, da dann die Bedingung  $1/\sqrt{N} \ll \lambda$ , d. h. daß die Abstände der Zylinder klein gegen die Wellenlänge sein sollen, verletzt werden würde. Die numerische Berechnung ergibt folgende Tabelle für den parallelen und senkrechten Fall, die in den Figg. 2, 3, 4 dargestellt ist.

$\lambda$ (cm)	$\nu_{\parallel}$	$\kappa_{\parallel}$	$\nu_{\perp}$	$\kappa_{\perp}$	$\nu_{\parallel} - \nu_{\perp}$
5	0,752	2,538	1,515	0,126	- 0,763
7	0,803	1,302	1,174	0,000	- 0,371
10	1,699	2,363	1,151	—	+ 0,548
12	2,516	2,800	1,133	—	+ 1,383
13	3,005	2,848	—	—	—
14	3,463	2,759	—	—	—
15	3,942	2,243	—	—	—
18	4,215	1,413	—	—	—
20	4,132	0,851	1,131	—	+ 3,001
25	3,918	0,426	—	—	2,787
30	3,688	0,239	—	—	2,557
40	3,475	0,109	—	—	2,344
$\infty$	3,325	0	1,131	0	2,194

Fig. 2 stellt  $\nu_{\parallel}$  und  $\kappa_{\parallel}$ , Fig. 3 stellt  $\nu_{\perp}$  und  $\kappa_{\perp}$ , Fig. 4 endlich  $\nu_{\parallel} - \nu_{\perp}$ , das die Stärke der Doppelbrechung mißt, als Funktion der Wellenlänge dar. Es sei bemerkt, daß für den parallelen Fall zwei Eigenschwingungen bei Wellenlängen von 4,778 und 13,158 cm liegen, die sich beide durch starke Extinktion und anomale Dispersion bemerkbar machen. In dem senkrechten Falle liegen zwei Eigenschwingungen bei 2,922 und 4,778 cm, von denen nur die letztere in ihrer Wirkung noch bemerkbar ist. Man sieht, daß sehr große Unterschiede im Brechungsexponenten in verhältnismäßig kleinem Wellenlängenintervall auftreten können; z. B. variiert  $\nu_{\parallel}$  von 0,75 bei 7 cm Wellenlänge bis 4,2 bei 18 cm Wellenlänge. Ähnlich verhält es sich mit der Extinktion. Auch das Re-

flexionsvermögen, das experimentell am leichtesten zu bestimmen ist, z. B. mit elektrischen Wellen, weist erhebliche Schwankungen auf.

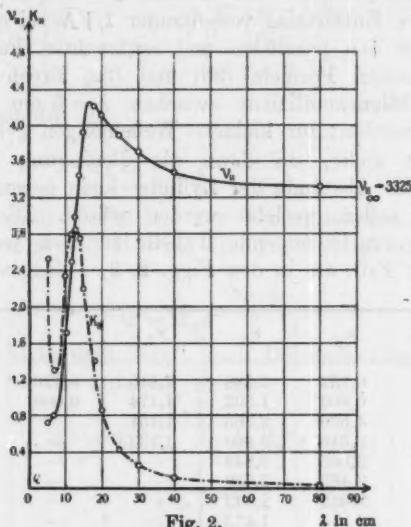


Fig. 2.

In dem ganzen hier berechneten Bereich ist  $R_{II}$  größer als  $R_I$ ; und  $\kappa_{II}$  größer als  $\kappa_I$ . Stellt man sich daher ein

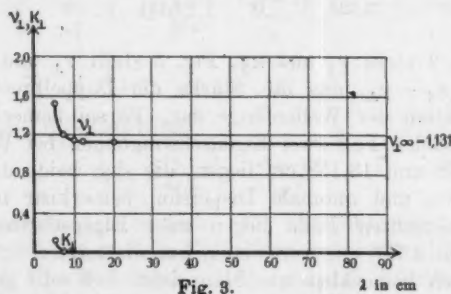


Fig. 3.

„Gitter“, nach Analogie des Hertzschen Gitters, aus dielektrischen Wasserzylindern her, und untersucht seine Durchlässigkeit gegen elektrische Wellen, so findet man, daß ein

solches Gitter sehr wenig Energie hindurchläßt, wenn der elektrische Vektor den Zylinderachsen parallel ist, dagegen verhältnismäßig mehr, wenn beide gekreuzt sind. Dieses Verhalten ist analog demjenigen von Hertzschen Metallgittern

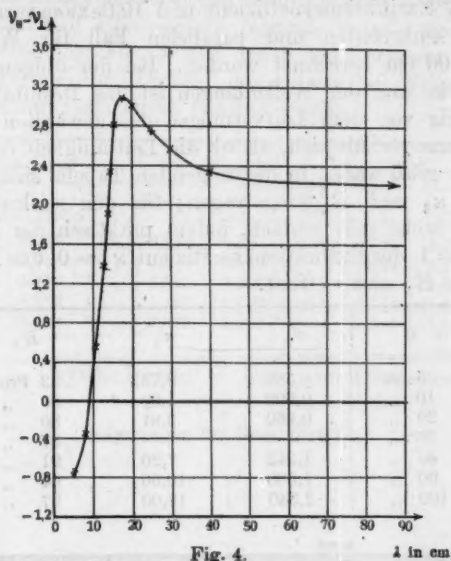


Fig. 4.

und ist von Laugwitz und Schaefer<sup>1)</sup> zum ersten Male mit dem geschilderten Erfolge realisiert worden. Diese Schirmwirkung eines dielektrischen Gitters ist ebenso eine Folge des Verschiebungsstromes, der in den Zylindern auftritt, wie die Schirmwirkung des Hertzschen Metallgitters eine Folge der in den Gitterelementen induzierten Leitungsströme ist. Der Versuch mit dem dielektrischen Gitter ist also ein einfacher Vorlesungsversuch für die Existenz der Verschiebungsströme.

## § 10.

Ein weiteres Beispiel, das wir mitteilen, bezieht sich auf metallische Gitter. Die Dimensionen sind dabei so gewählt,

1) M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **23**, p. 148. 1907. — Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. **23**, p. 163. 1907.

daß der Versuch mit elektrischen Wellen ohne weiteres realisierbar ist.

Silberdrähte oder Kupferdrähte von 0,1 cm Radius sind in Abständen von 1 cm ins Vakuum eingelagert. Brechungs-exponent, Extinktionskoeffizient und Reflexionsvermögen sind für den senkrechten und parallelen Fall für Wellenlängen von 5—100 cm berechnet worden. Bei der obigen Wahl der Drahtstärke und der Wellenlängen ist das Resultat praktisch unabhängig von dem Leitvermögen des gewählten Materials: das Medium verhält sich, als ob die Leitfähigkeit der Zylinder unendlich groß wäre. In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $\nu_{\parallel}$ ,  $\kappa_{\parallel}$  und  $R_{\parallel}$  eingetragen; für den senkrechten Fall liegt die Sache sehr einfach, indem praktisch der Brechungsindex  $\nu_{\perp} = 1$ , der Extinktionskoeffizient  $\kappa_{\perp} = 0$ , das Reflexionsvermögen  $R_{\perp}$  also = 0 ist.

$\lambda$	$\nu_{\parallel}$	$\kappa_{\parallel}$	$R_{\parallel}$
5 cm	0,586	0,732	23 Proz.
10 "	0,609	1,90	60 "
20 "	0,860	3,81	80 "
30 "	—	—	87 "
40 "	1,342	7,20	91 "
60 "	1,680	10,60	94 "
100 "	2,340	18,00	97 "

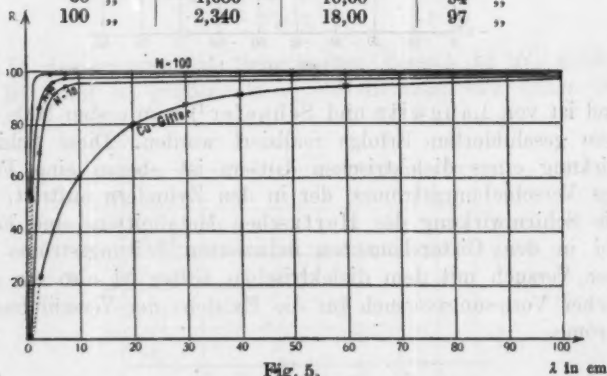


Fig. 5.

In Fig. 5 stellt die unterste Kurve das Reflexionsvermögen unseres Mediums als Funktion der Wellenlänge dar, und man erkennt, daß eine sehr dünne Schicht desselben die bekannte Hertzsche Gitterwirkung ausübt.

Ganz ähnlich liegt die Sache, wenn wir Silberdrähte von 0,001 cm Radius benutzen, und auf der Flächeneinheit der Reihe nach 10 oder 50 oder 100 anordnen. Im senkrechten Falle ist das Reflexionsvermögen wieder praktisch gleich Null; den parallelen Fall erläutern die folgende Tabelle und die drei oberen Kurven der Fig. 5, aus denen man erkennt, daß die starke Steigerung der „Dichte“ des Gitters bei Wellen größer als 10 cm kaum noch einen Einfluß ausübt.

$\lambda$	$N = 10$			$N = 50$			$N = 100$		
	$\nu_{\parallel}$	$\alpha_{\parallel}$	$R_{\parallel}$	$\nu_{\parallel}$	$\alpha_{\parallel}$	$R_{\parallel}$	$\nu_{\parallel}$	$\alpha_{\parallel}$	$R_{\parallel}$
1 cm	0,885	0,059	1%	0,261	0,774	52 %	0,326	1,080	54%
5 "	0,371	1,746	70 "	0,740	4,371	86 "	1,034	6,260	99 "
10 "	0,472	4,450	91 "	1,061	9,900	96 "	1,491	14,071	99 "
15 "	0,600	6,662	93 "	1,435	14,992	97,5 "	1,935	21,178	99 "
20 "	0,810	8,758	96 "	2,322	19,738	98 "	2,546	27,855	99 "

Breslau, Physik. Institut d. Univ., im Dezember 1915.

(Eingegangen 20. März 1916.)

**4. Bemerkungen zu den  
Svedbergschen Beobachtungen über Elektrizitäts-  
leitung in anisotropen Flüssigkeiten;  
von W. Voigt.**

1. Die soeben erschienene zweite Mitteilung des Hrn. Svedberg<sup>1)</sup> über die Elektrizitätsleitung in anisotropen Flüssigkeiten bringt mir einen Abschnitt aus seiner ersten Mitteilung<sup>2)</sup> in Erinnerung, gegen den ich Bedenken geltend machen möchte. Es handelt sich dabei um die Vergleichung der Beobachtungen über die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Richtung innerhalb der homogen gemachten anisotropen Flüssigkeit mit dem theoretischen Gesetz; diese Vergleichung hat aber eine gewisse Bedeutung, weil die Übereinstimmung zwischen beiden eine wichtige Stütze für die Annahme geben würde, es habe die homogen gemachte Schicht wirklich die Eigenschaften einer aus einem einachsigen Kristall hergestellten Platte. Hr. Svedberg teilt eine Berechnung mit, die zu einer ihn befriedigenden Übereinstimmung führt. Aber die Grundlage dieser Rechnung weicht nach zwei Richtungen hin von den Forderungen der Theorie ab, und somit hat das Ergebnis kein volles Gewicht. Ich möchte dies im Nachstehenden erweisen und eine Vergleichung der Beobachtungen mit den richtigen theoretischen Formeln daran schließen.

Bezeichnen  $\mathfrak{J}_x, \mathfrak{J}_y, \mathfrak{J}_z$  und  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  die Komponenten von elektrischer Stromdichte und Feldstärke, so gelten für ein beliebiges Achsensystem als Ausdruck des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes die Beziehungen<sup>3)</sup>:

$$(1) \quad \mathfrak{J}_x = l_{11} \mathfrak{E}_x + l_{12} \mathfrak{E}_y + l_{13} \mathfrak{E}_z, \text{ usw.}$$

und

$$(2) \quad \mathfrak{E}_x = k_{11} \mathfrak{J}_x + k_{12} \mathfrak{J}_y + k_{13} \mathfrak{J}_z, \text{ usw.};$$

1) Th. Svedberg, Ann. d. Phys. 40. p. 437. 1916.

2) Th. Svedberg, Ann. d. Phys. 44. 1121. p. 1914.

3) Vgl. für das Folgende z. B. W. Voigt, Kristallphysik, p. 337 u. f. Leipzig 1910.

dabei sind die  $l_{\lambda\lambda}$  die Parameter der Leitfähigkeit, die  $k_{\lambda\lambda}$  diejenigen des Widerstandes, und man darf die Beziehungen  $l_{\lambda\lambda} = l_{\lambda\lambda}$  und  $k_{\lambda\lambda} = k_{\lambda\lambda}$  als erfüllt ansehen.

Handelt es sich um die Strömung in einem dünnen zur  $X$ -Achse parallelen Zylinder, so ist  $\mathfrak{J}_y = \mathfrak{J}_z = 0$ , also  $\mathfrak{E}_x = k_{11} \mathfrak{J}_x$ . Die Beobachtung liefert hier  $k_{11}$ . Ist der Zylinder aus einem einachsigen Kristall hergestellt, und schließt seine Achse einen Winkel  $\alpha$  mit der Kristallachse ein, dann ist

$$(3) \quad k_{11} = k_0 \cos^2 \alpha + k_1 \sin^2 \alpha,$$

wobei  $k_0$  und  $k_1$  die Hauptwiderstandskonstanten für die Richtungen parallel und normal zur Kristallachse bezeichnen. Die Formel, von der Hr. Svedberg ausgeht, ist dagegen

$$(4) \quad k_{11}^2 = k_0^2 \cos^2 \alpha + k_1^2 \sin^2 \alpha;$$

sie würde also unrichtig sein, selbst wenn die vorstehend eingeführten Prämissen bei seiner Anordnung erfüllt wären.

Aber Hr. Svedberg operiert nicht mit dünnen Zylindern, sondern mit Platten oder Schichten von zum Teil gegen die seitliche Erstreckung sehr kleiner Dicke. Legen wir die  $X$ -Achse in die Normale der Schicht, dann ist jetzt  $\mathfrak{E}_y$  und  $\mathfrak{E}_z$  merklich gleich Null, also  $\mathfrak{J}_x = l_{11} \mathfrak{E}_x$ , und dabei  $l_{11}$  von  $1/k_{11}$  durchaus verschieden. Unter den obigen Voraussetzungen über die Lage der  $X$ -Achse im Kristall gilt hierbei

$$(5) \quad l_{11} = l_0 \cos^2 \alpha + l_1 \sin^2 \alpha,$$

und  $l_0$  und  $l_1$  sind analog definiert, wie oben  $k_0$  und  $k_1$ . Dies ist nun die Formel, nach der m. E. die Svedbergschen Beobachtungen berechnet werden müssen.

Ich stelle nachstehend die Messungen von  $l_{11}/l_1$ , die resp. mit zwei Schichten einer Lösung von HCl in *p*-Azoxyphenetol von den Dicken  $a = 0,5$  mm und  $a = 2,0$  mm ausgeführt sind, mit den Ergebnissen beider Berechnungen (S. und V.) zusammen.

Zugrunde gelegt sind dabei die Zahlen 1,37 und 1,00 für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$ . Man sieht, daß die Svedbergschen Rechnungsergebnisse für alle mittleren Winkel beträchtlich kleiner sind als die Beobachtungen, während die Ergebnisse der richtigen Theorie sich durchaus denjenigen der Messung anschließen. Die homogen gemachten Schichten der aniso-



a	Beobachtet		Berechnet	
	a = 0,5	a = 2,0	S.	V.
0°	1,37	1,37	1,37	1,37
10	1,36	1,36	1,35	1,36
20	1,32	1,32	1,31	1,32
30	1,27	1,27	1,24	1,27
40	1,29 (?)	1,21	1,17	1,21
50	1,14	1,13	1,11	1,15
60	1,08	1,09	1,07	1,09
70	1,03	1,04	1,03	1,04
80	1,00	1,00	1,01	1,01
90	1,00	1,00	1,00	1,00

tropen Flüssigkeit haben hiernach in noch vollkommener Weise die Eigenschaften von Kristallplatten, als es nach der Sved bergschen Rechnung schien.

2. Ließ sich die Frage der Abhängigkeit der Leitfähigkeit der anisotropen Flüssigkeit von der Richtung, wie gezeigt, leicht vollkommen aufklären, so gelingt dies nicht in gleicher Weise bezüglich einer anderen Frage, die durch die Sved bergschen Beobachtungen entsteht. Die nicht homogenisierte Flüssigkeit wird im allgemeinen aufgefaßt als ein System homogener Elementarbereiche, deren jedes einem Kristallbrocken äquivalent ist, und die in vollkommener Unordnung orientiert sind. Die physikalischen Eigenschaften eines solchen „quasiisotropen Mediums“ bestimmen sich prinzipiell durch die bezüglichen Parameter des Kristalls, dem die Brocken entnommen sind; aber eine einigermaßen strenge Durchführung der Berechnung bietet große Schwierigkeiten. Eine Überschlagsrechnung habe ich für die Leitfähigkeiten vor längerer Zeit angestellt<sup>1)</sup> und bin dabei zu dem Resultat gelangt, daß n. U. die Leitfähigkeit  $\bar{l}$  des quasiisotropen Mediums in der Nähe des arithmetischen Mittels  $\frac{1}{3} \sum l_k$  der drei Hauptleitfähigkeiten  $l_1, l_2, l_3$  des Kristalls liegen möchte, daß aber für die Widerstände  $k$  eine analoge Beziehung nicht gelten wird. Die Beobachtungen des Hrn. Sved berg haben nun aber Werte von  $\bar{l}$  geliefert, die jederzeit beträchtlich unterhalb  $\frac{1}{3} \sum l_k$  liegen. Es ist die Frage, ob sich diese Tatsache verständlich machen läßt.

1) W. Voigt, Kristallphysik, p. 954 u. f. Leipzig 1910.



Die Voraussetzung der oben erwähnten Rechnung war, daß bei hinreichender Kleinheit und Ungeordnetheit der Elemente die Potentialflächen in dem quasiisotropen Medium nahe ebenso verlaufen wie in einem wirklich isotropen. Es ist einleuchtend, daß, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, dem Medium eine Leitfähigkeit eigen sein wird, die kleiner als  $\frac{1}{2} \Sigma l_h$  ist. Man kann dies durch die folgende Betrachtung stützen, die allerdings nicht ganz direkt mit dem Problem zusammenhängt.

Wir gehen aus von der Betrachtung einer Kugel aus einem leitenden Kristall in einem leitenden unendlichen isotropen Medium, in dem zwei ferne, normal zur X-Achse stehende Elektrodenplatten angebracht sind. Das Zentrum der Kugel sei der Koordinatenanfang, die Richtungskosinusse seiner Hauptleitfähigkeitsachsen  $l_1, l_2, l_3$  gegen das XYZ-System seien  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ .

Bezeichnet  $\mathfrak{E}_0$  die Feldstärke, die bei Abwesenheit der Kugel zwischen den beiden Elektroden herrschen würde, so lautet bei Anwesenheit der Kugel der Ausdruck für das elektrische Potential im Raume außerhalb derselben

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_a = \mathfrak{E}_0 \left\{ x + \frac{R^3}{r^3} [ \alpha_1 L_1 (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \right. \\ \quad + \alpha_2 L_2 (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) \\ \quad \left. + \alpha_3 L_3 (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) ] \right\} \end{aligned} \right\},$$

wobei  $R$  der Kugelradius,

$$L_h = \frac{l_h - l_a}{l_h + 2l_a}$$

und  $l_a$  die Leitfähigkeit des äußeren isotropen Mediums ist.

Wir wollen uns nun zwischen den Elektrodenplatten *sehr viele kleine gleiche* Kristallkugeln in regelloser Anordnung und in allen möglichen Orientierungen vorhanden denken, in Abständen soviel größer als ihre Radien, daß man jede einzelne Kugel als für sich allein vorhanden behandeln kann. Dann darf man auf den Raum außerhalb der Kugeln die obige Formel (6) anwenden, wenn man nur statt des *einen* zu  $\mathfrak{E}_0 x$  tretenden Gliedes die ganze Summe analoger Glieder für alle Kügelchen setzt.

Ist die Leitfähigkeit der Elektroden sehr groß gegen diejenige des vorstehend konstruierten „quasiisotropen Mediums“,

so wird in ihnen das Potential, trotz der Inhomogenität jenes Mediums, konstant sein.

Man kann dann fragen, wie groß die Leitfähigkeit  $l_a$  sein müsse, damit die Gesamtströmung durch die eingebrachten Kügelchen nicht beeinflußt werde. Hierzu ist die ausreichende und notwendige Bedingung, daß über ein gegen die Abstände der Kügelchen großes Flächenstück  $F$  der Elektroden summiert,  $l_a \partial \varphi_a / \partial x$  einen von der Wirkung der Kügelchen unabhängigen Wert liefert. Der auf diese Weise definierte Wert von  $l_a$  hat eine gewisse Analogie zu der Leitfähigkeit  $\bar{l}$  des aus Kristallbrocken bestehenden quasiisotropen Mediums.

Es mag nun die eine Elektrodenfläche die  $YZ$ -Ebene sein, ihr Potential gleich Null. Es ist dann zur Erfüllung dieser letzteren Bedingung ein Spiegelungsverfahren anzuwenden und zu setzen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_a = \mathfrak{E}_0 \left\{ x + \sum \frac{R^3}{r_h^3} \left[ \alpha_{1h} L_1 (\alpha_{1h} (x - x_h) + \beta_{1h} (y - y_h) \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{1h} (z - z_h) + \dots \right) \right] \\ \left. + \sum \frac{R^3}{r_h'^3} \left[ \alpha_{1h} L_1 (\alpha_{1h} (x + x_h) - \beta_{1h} (y - y_h) \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_{1h} (z - z_h) + \dots \right) \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist

$$r_h^2 = (x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2$$

die Entfernung vom Zentrum der Kugel  $h$ ,

$$r_h'^2 = (x + x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2$$

die Entfernung von dem Spiegelpunkt zu jenem Zentrum bezüglich der Elektrodenfläche  $x = 0$ . Die Summen sind über alle Zentren zu erstrecken.

Für  $x = 0$  ist

$$r_h^2 = r_h'^2 = x_h^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2 ,$$

daher auch

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = \mathfrak{E}_0 \left\{ 1 - 2 \sum \frac{R^3}{r_h^3} \left( 1 - \frac{3x_h^2}{r_h^2} \right) (\alpha_{1h}^3 L_1 + \alpha_{2h}^3 L_2 + \alpha_{3h}^3 L_3) \right\} .$$

Dieser Ausdruck ist nun mit  $l_a dy dz / F$  zu multiplizieren und über eine Fläche  $F$ , groß gegen den Kugelabstand, zu integrieren.

Da der Anteil aller Kugeln mit dem gleichen Abstand  $x_h$  von der Elektrode an dem Leitungsvorgang bei gleicher Orientierung gleich sein muß, so kann

$$(9) \quad \int_{(F)} \frac{R^3}{r_A^3} \left(1 - \frac{3x_A^2}{r_A^2}\right) \frac{dy dz}{F} = X_A$$

nur eine Funktion von  $x_A$  sein. Wir haben somit:

$$(10) \quad \left\{ l_a \int_{(F)} \frac{\partial q_a}{\partial x} \frac{dy dz}{F} = l_a \mathfrak{E}_0 \left\{ 1 - 2 \sum X_A (\alpha_{1A}^2 L_1 + \alpha_{2A}^2 L_2 + \alpha_{3A}^2 L_3) \right\} \right.$$

Hierin darf man nun innerhalb einer Schicht von der kleinen Dicke  $\Delta x_A$  so viele ( $n$ ) Kugeln mit verschiedensten Orientierungen liegend annehmen, daß die Summe über den Klammerausdruck sich von dem  $n$ -fachen Mittelwert über *alle möglichen* Orientierungen nicht merklich unterscheidet. Dieser Mittelwert ist aber

$$(11) \quad \bar{L} = \frac{1}{3} (L_1 + L_2 + L_3).$$

Hieraus ergibt sich, daß der Einfluß der Kügelchen auf den Leitungsvorgang verschwindet, wenn dieser Ausdruck durch die Leitfähigkeit  $l_a$  zu Null gemacht wird. Dies liefert die Bedingung:

$$(12) \quad \frac{l_1 - l_a}{l_1 + 2l_a} + \frac{l_2 - l_a}{l_2 + 2l_a} + \frac{l_3 - l_a}{l_3 + 2l_a} = 0.$$

Ist die  $l_3$ -Achse eine Rotationsachse der Leitfähigkeit, also  $l_1 = l_2$ , und  $l_3$  in früherer Bezeichnung  $= l_0$ , so ist einfacher

$$(13) \quad 2 \frac{l_1 - l_a}{l_1 + 2l_a} + \frac{l_0 - l_a}{l_0 + 2l_a} = 0.$$

Schreiben wir diese Bedingung:

$$(14) \quad \frac{l_a - l_1}{l_0 - l_a} = \frac{1}{2} \frac{l_1 + 2l_a}{l_0 + 2l_a},$$

so läßt sich unmittelbar erkennen, daß, wenn  $l_0 > l_1$  ist,  $l_a$  *kleiner* ausfällt als  $(2l_1 + l_0)/3$ ; denn der letztere Wert resultiert, wenn rechts  $1/2$  steht, und der wirklich dort stehende Quotient ist  $< 1/2$ . Somit kann man als plausibel gemacht ansehen, daß auch die Leitfähigkeit  $\bar{l}$  der nicht homogenisierten anisotropen Flüssigkeit *kleiner* als  $(2l_1 + l_0)/3$  sein wird.

Die Beobachtungen des Hrn. Svedberg bestätigen dies, wie schon oben gesagt, *qualitativ*; sie sind aber mit der Formel (14) *zahlenmäßig* unvereinbar:  $\bar{l}$  ist viel kleiner, als  $l_a$  sich aus den beobachteten  $l_0$  und  $l_1$  berechnet. Um ein Beispiel zu geben, so ist für eine Lösung von HCl in *p*-Azoxy-

phenetol bei Feldern von 3000—5000 Gauss gefunden  $l_0/\bar{l} = 1,33$ ;  $\bar{l}/l_1 = 1,03$ , bei (wie oben)  $l_0/l_1 = 1,37$ . Somit liegt  $\bar{l}$  ganz nahe bei  $l_1$ .

Ein Grund für diese Differenz wird offenbar sein, daß das vorstehend behandelte Problem als Bild für die nicht homogenisierte anisotrope Flüssigkeit zu wenig ähnlich ist. Gewiß wird in dieser Hinsicht die benutzte Annahme, daß die anisotropen Kugeln nur einen kleinen Teil des Gesamtraumes ausfüllen, stark ins Gewicht fallen; infolge dieser Annahme müssen nämlich in dem Bilde die Stromlinien mit geringeren Knickungen verlaufen, als in der Wirklichkeit. Aber man kann zweifeln, ob dieser Umstand allein zur vollen Erklärung der Differenz ausreicht. Jedenfalls ist noch eine andere Abweichung denkbar. In dem Bilde sind alle möglichen Orientierungen der Kugeln gleichmäßig zugelassen; es kommen also auch alle möglichen Brechungen von Stromlinien an ihren Oberflächen *gleichmäßig* vor. Es ist nun aber denkbar, daß in der nicht homogenisierten Flüssigkeit eine solche Gleichmäßigkeit nicht statthat, sondern die *schärferen* Brechungen überwiegen. Es ist z. B. möglich, daß die Existenz von benachbarten Bereichen mit *wenig verschiedenen* Orientierungen ausgeschlossen ist, weil zwischen nahen Molekülen die Tendenz der Parallelrichtung besteht, und daß demgemäß umgekehrt eine gegenseitige Orientierung benachbarter Bereiche, bei der die resp. Hauptachsen mehr oder weniger genau *normal* zueinander stehen, bei denen also jene Tendenz nicht oder nur schwach wirksam wird, besonders häufig vorkommt. Eine solche Auffassung wird durch gewisse Beobachtungen von Hrn. Lehmann über Gleichgewichtslagen von Systemen in einer indifferenten Flüssigkeit suspendierten Individuen „flüssiger Kristalle“ in der Tat nahe gelegt.

Jedenfalls kann man aus diesen Überlegungen schließen, daß der sehr kleine Wert der elektrischen Leitfähigkeit  $\bar{l}$  der nicht homogenisierten anisotropen Flüssigkeit einen Grund gegen die Auffassung der letzteren als eines Systemes homogener Bereiche in verschiedensten relativen Orientierungen nicht bietet. Und dies hat eine gewisse prinzipielle Bedeutung.

Göttingen, Anfang April 1916.

(Eingegangen 5. April 1916.)

**5. Stabilität zweiatomiger Molekeln,  
ihre Dissoziationswärme und deren Beziehung  
zur elektrochemischen Theorie;  
von F. Richarz.**

In seiner Abhandlung: „Über Molekülbildung als Frage des Atombaues“ hat Hr. W. Kossel<sup>1)</sup> eine außerordentlich bemerkenswerte Weiterbildung der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie entwickelt. Auch seine Schlußfolgerungen über die Größenordnung der Kräfte, die zwischen geladenen Atomen herrschen (p. 268, Abschnitt 19), sind zwar durchaus zutreffend, jedoch weitergehend bereits von mir in meinen Abhandlungen „Über die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome“<sup>2)</sup> sowie „Zur kinetischen Theorie mehratomiger Gase“<sup>3)</sup> gezogen worden.

Außerdem aber müssen die Schlüsse über die Stabilität zweiatomiger Molekeln, ihre Dissoziationswärme und deren Beziehung zur elektrochemischen Theorie, die neuerdings zum Teil auch Hr. W. Kossel zieht, scharf auseinandergezogen werden in solche Schlüsse, die bereits lediglich aus der kinetischen Theorie mehratomiger Gase zu ziehen sind, und weiter diejenigen, welche die elektrochemische Theorie hinzunehmen. Da auch ich anfänglich die Notwendigkeit dieser Scheidung nicht erkannt hatte, und diese daher in den ersten meiner erwähnten Abhandlungen noch nicht durchgeführt worden ist, sondern erst in den späteren, möge diese Trennung, die auch an den Folgerungen von Hrn. W. Kossel vorzunehmen ist, kurz auseinandergesetzt werden, zumal meine Schlüsse weiter gehen als die von Hrn. W. Kossel.

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. 40. p. 229. 1916.

2) F. Richarz, Sitzungsber. d. Niederrhein. Ges. Bonn, 48. p. 18. 1891; Münch. Sitzungsber. 24. p. 3. 1894; Wied. Ann. 52. p. 385. 1894; Naturwiss. Rdsch. 9. p. 273. 1894.

3) F. Richarz, Verh. d. Physik. Ges. Berlin 10. p. 73. 1891; Wied. Ann. 48. p. 467. 1893; Naturwiss. Rdsch. 9. p. 221. 1894.

Rein auf der kinetischen Theorie mehratomiger Gase ist aufgebaut der Zusammenhang zwischen Dissoziationswärme und Stabilität der Molekeln. Bei letzteren handelt es sich um den Zusammenhalt zweier Atome, z. B.  $H_2$ ,  $J_2$  oder auch zweier Atomgruppen, wie bei der Untersalpetersäure  $[NO_2]$ , die durch Wärmezufuhr und Temperaturerhöhung in die beiden einzelnen Atome bzw. Atomgruppen dissoziiert werden können. In Anknüpfung an Boltzmanns Theorie mehratomiger Gasmolekeln habe ich abgeleitet, daß für Stabilität des Zusammenhaltes die auf die Volumeinheit bezogene Dissoziationswärme  $w$  groß sein muß gegen den Wert des Druckes  $p$ .<sup>1)</sup> (Man kann leicht erkennen, daß diese beiden Größen gleiche Dimensionen haben, da ja  $p \cdot dv$  eine Arbeit ist.) Für die Dissoziationswärmen konnte ich meinen Bemerkungen teils direkte, teils indirekte experimentelle Bestimmungen zugrunde legen, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

Prozeß	Dissoziations- temperaturen	Dissoziationswärme $w$ in Erg pro ccm
$N_2O_4 = 2(NO_2)$	$\sim 15^\circ$ bis $150^\circ$	$25 \cdot 10^6$
$J_2 = 2J$	$\sim 600^\circ$ bis $1400^\circ$	$54 \cdot 10^6$
$H_2 = 2H$	sehr hoch	$488 \cdot 10^6$

Die Werte von  $w$  sollen nach meiner obigen Theorie bei stabilen Molekeln groß sein gegen  $p$ . Bei  $0^\circ$  und 76 cm Barometerstand ist:

$$p = 1,01 \cdot 10^6 \text{ Dynen pro cm}^2.$$

$w$  ist also in der Tat stets erheblich größer als  $p$ , und zwar um so mehr, je weiter das betreffende Gas bei  $0^\circ$  von der Temperatur der beginnenden Dissoziation entfernt ist, d. h. je stabiler es ist. Daß die vorkommenden Verhältnisse von  $w$  zu  $p$  im Sinne meiner damaligen theoretischen Erörterungen über die Stabilität der Molekeln auch geradezu als groß zu bezeichnen sind, ist daraus ersichtlich, daß dieses Verhältnis

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 491. 1893. Ein Teil meiner Ableitungen ist wiedergegeben bei R. H. Weber und R. Gans, Repertorium d. Physik, I. 2. p. 431. 1916.

in jene  
dessen  
Werte  
übertr  
gelten  
Di  
hang  
beruhe  
zu unt  
Verglei  
nung  
Elemen  
licher  
durch  
den V  
Annah  
elektri  
sich z  
aus E  
neten  
solche  
quant  
Wenn  
irgende  
Kräfte  
werde

30 be  
Wert  
gegen  
bleib  
mit  
salpe  
Deut  
tatsä  
gege

1894



in jenen Erörterungen als Exponent von  $e$  auftritt; infolge dessen werden diese Exponentialfunktionen bereits groß durch Werte des Verhältnisses  $w/p$ , welche die Einheit erheblich übertreffen, wenn diese Werte auch sonst noch nicht als groß gelten könnten.

Die vorstehenden Schlußfolgerungen über den Zusammenhang von Stabilität der Molekeln und Dissoziationswärme beruhen nur auf der kinetischen Gastheorie. Davon wohl zu unterscheiden ist der von mir bereits damals angestellte Vergleich der Dissoziationswärme mit der Arbeit bei der Trennung zweier entgegengesetzter Helmholtzschen elektrischen Elementarquanten aus molekularem Abstände bis zu unendlicher Entfernung.<sup>1)</sup> Diesen Vergleich hatte ich in der Weise durchgeführt, daß ich das elektrische Elementarquantum aus den Werten der Dissoziationswärmen berechnete, unter der Annahme, bei diesen Dissoziationen finde jene Trennung der elektrischen Elementarquanten tatsächlich statt. Es ergab sich zwar im Mittel gute Übereinstimmung mit dem andererseits aus Elektrolyse und Loschmidtscher Zahl von mir berechneten Werte; ob aber bei diesen Dissoziationen wirklich eine solche Trennung entgegengesetzter elektrischer Elementarquanten vorliegt, muß heutigen Tages als zweifelhaft erscheinen. Wenn wir uns aber, wie auch Hr. W. Kossel, Dissoziation irgendeiner Molekel denken, deren beide Atome durch die Kräfte ihrer elektrochemischen Ladungen zusammengehalten werden, z. B.



so beansprucht sie eine Dissoziationswärme von einem solchen Werte, wie ich ihn schon früher der Trennung zweier entgegengesetzter elektrischen Elementarquanten zuschrieb. Fernbleibt die Tatsache bestehen, daß dieser Wert übereinstimmt mit dem Mittel der experimentell gefundenen Werte für Unterpetersäure, Joddampf und Wasserstoff, wenn auch die Deutung dieser Übereinstimmung entfällt. Wir haben also tatsächlich einen Wert für die Trennungsarbeit zweier entgegengesetzt geladener univalenter Atome, welcher einer Dis-

1) F. Richarz, l. c., insbesondere Münch. Sitzungsber. 24. p. 26. 1894; Wied. Ann. 52. p. 405. 1894.

soziationswärme von solchen Molekeln entspricht, die bei gewöhnlichen Temperaturen stabil sind, und welche die aus rein kinetischen Betrachtungen von mir abgeleitete Stabilitätsbedingung erfüllen, daß die auf die Volumeneinheit (im Gaszustande) bezogene Dissoziationswärme groß sein muß gegen den Druck. Auf den Aggregatzustand kommt es dabei nicht an, da die kinetische Energie je eines Atoms bei gleicher Temperatur dieselbe ist, unabhängig vom Aggregatzustande.

In dieser Weise reiht sich die Frage nach der Stabilität einer elektrochemischen Molekel, wie wir sie nennen können, in meine älteren kinetischen Betrachtungen als Spezialfall ein und war in ihnen bereits enthalten.

Selbstverständlich wird die Richtigkeit der Schlußfolgerungen von Hrn. W. Kossel durch diese Klärung nicht im mindesten berührt.

Marburg i. H., Physik. Institut, im April 1916.

(Eingegangen 25. April 1916.)



bei  
us  
te-  
as-  
en  
ht  
er  
le.  
ät  
n,  
in  
e-  
m